# Musterlösung

## Lineare Algebra und Numerische Mathematik

### Winter 2011

Prof. D. Stoffer

---

**Aufgabe 1**

**a)** Wir erhalten

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 4a & -1 & a & b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & 2a-1 & -2 & 0 \\ 0 & 4a^2-1 & -3a & b \end{array}\right].$$

**b)** Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

(i) $a \notin \{-2, \frac{1}{2}\}$. In diesem Fall sind die Diagonalelemente des angegebenen Schemas sämtlich verschieden von Null. Damit stellt dieses Schema das Endschema des Gauss-Algorithmus dar. Durch Rückwärtssubstitution ergibt sich die eindeutige Lösung

$$\mathfrak{L} = \left\{ \frac{b}{a+2}\Big(\frac{1}{2a-1}, \frac{2}{2a-1}, 1\Big) \right\}.$$

(ii) $a = -2$. Durch Einsetzen in das gegebene Schema erhalten wir

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right].$$

Ist die Verträglichkeitsbedingung $b = 0$ erfüllt, so gibt es eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter. Wir wählen $z = s \in \mathbb{R}$ und erhalten mittels Rückwärtssubstitution

$$\mathfrak{L} = \left\{ \frac{s}{5}(-1, -2, 5) : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Gilt hingegen $b \neq 0$, so ist $\mathfrak{L} = \emptyset$.

(iii) $a = \frac{1}{2}$. Einsetzen in das gegebene Schema liefert

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right].$$

Ist die Verträglickeitsbedingung $b = 0$ erfüllt, ergibt sich erneut eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter. Die Wahl $y = s \in \mathbb{R}$ führt auf

$$\mathfrak{L} = \left\{ \frac{s}{2}(1, 2, 0) : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Falls $b \neq 0$, ist wieder $\mathfrak{L} = \emptyset$.

## Aufgabe 2

**a)** Die Abbildungsmatrix ist gegeben durch $P = I - vv^\top$, wobei $v$ ein normierter Normalenvektor der Ebene $\alpha_0$ ist. Da die Ebenen $\alpha$ und $\alpha_0$ parallel zueinander sind, ist $v$ ebenfalls ein Normalenvektor der Ebene $\alpha$. Um $v$ zu bestimmen, ermitteln wir also zunächst einen beliebigen Normalenvektor der Ebene $\alpha$:

$$n = (a - c) \times (b - c) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und normieren diesen anschliessend:

$$v = \frac{1}{\|n\|} n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für die gesuchte Abbildungsmatrix ergibt sich demnach

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**b)** Die Projektionen von $a$ und $b$ ergeben sich durch Multiplikation mit der Abbildungsmatrix $P$:

$$\bar{a} = Pa = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = Pb = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**c)** $x$ liegt genau dann in der Ebene $\alpha_0$, wenn es orthogonal zu deren Normalenvektor ist. Es muss also gelten

$$\langle x, n \rangle = (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot x_2 + 2 \cdot 0 = -2x_2 - 2 \overset{!}{=} 0,$$

was genau dann der Fall ist, wenn $x_2 = -1$.

**d)** Mit den bekannten Werten von $\bar{a}$, $\bar{b}$ und $x$ soll gelten:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{z_1}{9} \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{z_2}{9} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich dabei um ein lineares Gleichungssystem bestehend aus drei Gleichungen. Da nur die beiden Unbekannten $z_1$ und $z_2$ zu bestimmen sind, können wir eine dieser Gleichungen ausser Acht lassen. Wir entscheiden uns daher, nur die beiden letzten Gleichungen zu betrachten. Diese multiplizieren wir mit 9 und schreiben sie als Tableau, welches wir anschliessend mit dem Gauss-Algorithmus lösen:

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline z_1 & z_2 & 1 \\ \hline -4 & 5 & -9 \\ 4 & 4 & 0 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline z_1 & z_2 & 1 \\ \hline 4 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & -9 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline z_1 & z_2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array}.$$

Durch Rückwärtseinsetzen finden wir schliesslich die Lösungen $z_2 = -1$ und $z_1 = 1$. Die gesuchte Zerlegung lautet demnach
$$x = \bar{a} - \bar{b}.$$

## Aufgabe 3

**a)** Wir bestimmen zunächst die Ableitung von $H$:
$$H'(\varepsilon) = \frac{1}{3(a+\varepsilon)^{2/3}}.$$
Unter Verwendung der im Hinweis gegebenen Identität mit $u = \sqrt[3]{a+\varepsilon}$ und $v = \sqrt[3]{a}$ ergibt sich für die Konditionszahl des Problems
$$\begin{aligned}\chi_H(\varepsilon) = \left|\frac{\varepsilon H'(\varepsilon)}{H(\varepsilon)}\right| &= \frac{(a+\varepsilon)^{2/3} + (a+\varepsilon)^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3}}{3(a+\varepsilon)^{2/3}} \\ &= \frac{1}{3}\left[1 + \underbrace{\left(\frac{a}{a+\varepsilon}\right)^{1/3}}_{\approx 1} + \underbrace{\left(\frac{a}{a+\varepsilon}\right)^{2/3}}_{\approx 1}\right] \approx 1.\end{aligned}$$
Das Problem ist demnach für $\varepsilon \ll a$ gut konditioniert.

**b)** Wir verwenden wiederum die Identität aus dem Hinweis und erhalten
$$H(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(a+\varepsilon)^{2/3} + (a+\varepsilon)^{1/3}a^{1/3} + a^{2/3}} \approx 2.5641025641 \cdot 10^{-13}$$
Da alle Summanden im Nenner positiv sind, tritt bei deren Addition keine Auslöschung auf.

**c)** Die gesuchte Konditionszahl ist die Quadratwurzel aus dem Verhältnis des grössten zum kleinsten Eigenwert der Matrix
$$A^\top A = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$
Das charakteristische Polynom von $A^\top A$ lautet
$$p_{A^\top A}(\lambda) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -6 \\ -6 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 64 = (\lambda-4)(\lambda-16).$$
Die Matrix $A^\top A$ besitzt somit die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = 16$ und für die Konditionszahl von $A$ ergibt sich
$$\kappa_2(A) = \sqrt{\lambda_2/\lambda_1} = 2.$$

## Aufgabe 4

Wir formulieren die Beziehung $Q = a + bx + cy$ für die einzelnen Messwerte als ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem $Az = q$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 1 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Der Parametervektor $z$, der die kleinste Fehlerquadratsumme nach sich zieht, ergibt sich dann als Lösung der Normalengleichung $A^\top Az = A^\top q$ mit

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^\top q = \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Anwendung des Gauss-Algorithmus führt auf

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 6 & 1 & 0 & 21 \\ 1 & 5 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 17 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|rrr|r|} \hline 1 & 5 & 1 & 16 \\ 0 & -29 & -6 & -75 \\ 0 & 1 & 4 & 17 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|rrr|r|} \hline 1 & 5 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 110 & 418 \\ \hline \end{array}.$$

Durch Rückwärtssubstitution erhalten wir schliesslich $c = \frac{19}{5}$, $b = \frac{9}{5}$ und $a = \frac{16}{5}$.

## Aufgabe 5

**a)** Mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ergibt sich

- für ein Intervall der Länge $h = 1$:

$$I(1) = \frac{1}{2}\left[f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{2})\right] = \frac{4}{3} \approx 1.3333,$$

- für zwei Intervalle der Länge $h = \frac{1}{2}$:

$$I(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4}\left[f(\tfrac{1}{2}) + 2f(1) + f(\tfrac{3}{2})\right] = \frac{7}{6} \approx 1.1667,$$

- für vier Intervalle der Länge $h = \frac{1}{4}$:

$$I(\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{8}\left[f(\tfrac{1}{2}) + 2f(\tfrac{3}{4}) + 2f(1) + 2f(\tfrac{5}{4}) + f(\tfrac{3}{2})\right] = \frac{67}{60} \approx 1.1167.$$

**b)** Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$I(h) = I + C_1h^2 + C_2h^4 + C_3h^6 + \cdots = P(h^2)$$

mit einer analytischen Funktion $P$. Wir extrapolieren nun die bekannten Funktionswerte $P(1) = \frac{4}{3}$, $P(\frac{1}{4}) = \frac{7}{6}$ und $P(\frac{1}{16}) = \frac{67}{60}$, um einen Schätzwert für $I = P(0)$ zu erhalten. Das

Neville-Aitken Schema liefert

$$
\begin{array}{cccc}
h^2 & P(h^2) & & \\
1 & \dfrac{4}{3} & & \\
 & & \dfrac{(0-\frac{1}{4})\cdot\frac{4}{3}+(1-0)\cdot\frac{7}{6}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{10}{9} & \\
\dfrac{1}{4} & \dfrac{7}{6} & & \dfrac{(0-\frac{1}{16})\cdot\frac{10}{9}+(1-0)\cdot\frac{11}{10}}{1-\frac{1}{16}} = \dfrac{742}{675}. \\
 & & \dfrac{(0-\frac{1}{16})\cdot\frac{7}{6}+(\frac{1}{4}-0)\cdot\frac{67}{60}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}} = \dfrac{11}{10} & \\
\dfrac{1}{16} & \dfrac{67}{60} & &
\end{array}
$$

Wir erhalten also die extrapolierte Näherung $\hat{I} = \frac{742}{675} \approx 1.099259$.

**c)** Für den relativen Fehler der extrapolierten Näherung $\hat{I}$ gegenüber $I$ ergibt sich

$$\hat{e}_{\text{rel}} = \frac{|\hat{I} - I|}{|I|} = \frac{\left|\frac{742}{675} - \ln 3\right|}{\ln 3} \approx 5.8890 \cdot 10^{-4}.$$

Damit ist dieser deutlich geringer als die relativen Fehler der Näherungen aus Teil **(a)**:

$$
\begin{aligned}
e_{\text{rel}}^{(1)} &= \frac{|I(1) - I|}{|I|} = \frac{\left|\frac{4}{3} - \ln 3\right|}{\ln 3} \approx 2.1365 \cdot 10^{-1}, \\
e_{\text{rel}}^{(2)} &= \frac{|I(\frac{1}{2}) - I|}{|I|} = \frac{\left|\frac{7}{6} - \ln 3\right|}{\ln 3} \approx 6.1946 \cdot 10^{-2}, \\
e_{\text{rel}}^{(4)} &= \frac{|I(\frac{1}{4}) - I|}{|I|} = \frac{\left|\frac{67}{60} - \ln 3\right|}{\ln 3} \approx 1.6433 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

## Aufgabe 6

**a)** Wir wollen alle Vektoren $u$ bestimmen, für die $x(t) = u$ eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung darstellt. Es muss also gelten, dass $0 = Au + b$ bzw. $Au = -b$. Wir schreiben dieses lineare Gleichungssystem als Tableau und wenden das Gauss-Verfahren an:

$$
\begin{array}{|rrr|r|}
\hline
-2 & 1 & 0 & 0 \\
-4 & 1 & -2 & -2 \\
0 & -1 & -2 & -2 \\
\hline
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|rrr|r|}
\hline
-2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -2 & -2 \\
0 & -1 & -2 & -2 \\
\hline
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|rrr|r|}
\hline
-2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}.
$$

Die Lösungsmenge enthält also einen freien Parameter. Wir wählen $u_3 = s \in \mathbb{R}$ und erhalten durch Rückwärtssubstitution

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

**b)** Das charakteristische Polynom der Matrix $A$ lautet

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-1) - 2(\lambda+2) + 4(\lambda+2)$$
$$= (\lambda+2)(\lambda^2+\lambda) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2).$$

Somit sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = -2$ die Eigenwerte der Matrix $A$. Die zugehörigen Eigenvektoren $t_i$ erhalten wir durch Lösen der linearen Gleichungssysteme $(A - \lambda_i I)t_i = 0$, $i = 1, 2, 3$:

- $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{array}{|rrr|r|} \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|rrr|r|} \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|rrr|r|} \hline -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

  Rückwärtssubstitution liefert

$$t_1 = s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

- $\lambda_2 = -1$.

$$\begin{array}{|rrr|r|} \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|rrr|r|} \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|rrr|r|} \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

  Rückwärtssubstitution liefert

$$t_2 = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

- $\lambda_3 = -2$.

$$\begin{array}{|rrr|r|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|rrr|r|} \hline -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|rrr|r|} \hline -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

  Rückwärtssubstitution liefert

$$t_3 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Es gilt also $T^{-1}AT = D$ mit

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**c)** Die gesuchte Lösung $x(t)$ lässt sich bekanntlich darstellen als Summe

$$x(t) = x^{\text{part}}(t) + x^{\text{hom}}(t)$$

aus einer Lösung $x^{\text{part}}$ der inhomogenen Gleichung und einer Lösung $x^{\text{hom}}$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\dot{x}^{\text{hom}}(t) = Ax^{\text{hom}}(t).$$

Als partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung können wir eine der Gleichgewichtslagen aus Teilaufgabe (a) verwenden, z. B.

$$x^{\text{part}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Wahl folgt für das homogene System die Anfangsbedingung

$$x^{\text{hom}}(0) = x(0) - x^{\text{part}}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden werden wir das homogene System durch eine geeignete Koordinatentransformation entkoppeln. Aus Teilaufgabe (b) wissen, wir dass $T^{-1}AT = D$ für

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Daher erfüllt $y(t) := T^{-1}x^{\text{hom}}(t)$ die Gleichung $\dot{y}(t) = Dy(t)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = T^{-1}x^{\text{hom}}(0)$. Wir bestimmen $y(0)$ durch Lösung des linearen Gleichungssystems $Ty(0) = x^{\text{hom}}(0)$. Der Gauss-Algorithmus liefert

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Rückwärtssubstitution ergibt $y(0) = (1, 1, 0)^\top$. Damit lautet die Lösung des transformierten Systems

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Rücktransformation erhalten wir

$$x^{\text{hom}}(t) = Ty(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{e}^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und schliesslich

$$x(t) = x^{\text{part}}(t) + x^{\text{hom}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{e}^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$