Musterlösung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik D-BAUG

Winter 2013

Prof. H.-R. Künsch

---

1. *(Multiple Choice)*
   Gegeben sei die folgende Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) $\det(\mathbf{A}) = 0$ genau dann wenn gilt

⊗ $a = 1$. ○ $a = 0$.

⊗ $\mathbf{A}$ singulär. ○ $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

○ $\det(\mathbf{A})$ wird nie Null. ⊗ $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

Bemerkung:

$\det(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(a-1)$. Deshalb gilt

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1.$$

Per Definition gilt:

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \text{ singulär} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \neq \{\mathbf{0}\}$$

Betrachten wir $\mathbf{A}$ genauer (z.B. indem wir die LR-Zerlegung anwenden (siehe **(d)**)), so stellen wir fest, dass

$$\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \begin{cases} 2 & a \neq 1 \\ 1 & a = 1 \end{cases}.$$

Somit ist $\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = 1 \Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$. Daraus folgt sofort, dass

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(b) Es gilt:

⊗ Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ ist

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(a+1)\lambda + \frac{1}{2}(a-1).$$

○ Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ ist

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(a+1)\lambda + \frac{1}{2}(a-1).$$

⊗ Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind reell für alle $a \in \mathbb{R}$.

○ Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{A}$ nicht diagonalisierbar ist.

Bemerkung:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}a - \lambda \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}a - \lambda \right) - \frac{1}{2} \\ &= \lambda^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(a+1)\lambda + \frac{1}{2}(a-1). \end{aligned}$$

Da $\mathbf{A}$ eine symmetrische Matrix mit reellen Koeffizienten ist, gilt auch, dass $\mathbf{A}$ immer diagonalisierbar ist und die Eigenwerte für alle $a \in \mathbb{R}$ reell sind.

(c) Für $a = -1$ gilt:

⊗ $\mathbf{A}$ ist eine orthogonale Matrix.

⊗ $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.

⊗ $\|\mathbf{Ax}\| = \|\mathbf{x}\|$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

⊗ $\|\mathbf{A}\| = 1$.

Bemerkung:

$\mathbf{A}$ ist orthogonal genau dann wenn $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$. Setzen wir $a = -1$, dann gilt:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1-1) \\ \frac{1}{2}(-1-1) & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 \,.$$

Somit ist $\mathbf{A}$ orthogonal für $a = -1$ und es gilt $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Da $\mathbf{A}$ gleichzeitig symmetrisch ist, haben wir

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \,.$$

Die beiden letzten Eigenschaften gelten für alle orthogonalen Matrizen.

(d) Die $\mathbf{LR}$-Zerlegung von $\mathbf{A}$ ist

⊗ $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$.

○ $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$.

Bemerkung:

Wir erhalten die Matrizen, indem wir einen Gaussschritt auf $\mathbf{A}$ anwenden (2.Zeile $-$ (-1) 1.Zeile). Dies ergibt $\mathbf{R}$. Die Matrix $\mathbf{L}$ erhalten wir mithilfe des Koeffizienten vor der 1.Zeile (-1).

2. Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\mathcal{F}:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3x_1 & & + & 6x_3 & - & 10x_4 & + & x_5\\ & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5\end{pmatrix}$$

(a) Stellen Sie die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ in Matrixform dar:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}\,,$$

d.h. geben Sie $\mathbf{A}$ an.

(b) Geben Sie Vektoren an, welche $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ aufspannen. Ist $\mathcal{F}$ surjektiv?

(c) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\text{ und }\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\\4\end{pmatrix}$$

in $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ liegen.

(d) Ergänzen Sie $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ zu einer Basis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$.

Lösung:

(a) Die Matrix $\mathbf{A}$ können wir direkt ablesen:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 6 & -10 & 1\\0 & 3 & -3 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

(b) Mit einem Blick auf

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A})=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix},...\right\}\quad\text{(Spaltenvektoren von }\mathbf{A}\text{)},$$

sehen wir, dass $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})=\mathbb{R}^2$, da z.B. $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bildet. Dies bedeutet, dass f surjektiv ist, respektive $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})=\mathbb{R}^2$. Es spannen z.B. die Standard-Basisvektoren

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

das Bild auf.

(c) Um zu zeigen, dass die beiden Vektoren im $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ liegen, müssen wir einfach verifizieren, dass

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i=\mathbf{0},\quad i\in\{1,2\}\,.$$

Tatsächlich gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & -10 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0+6-10+1 \\ 3-3-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & -10 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+6-10+4 \\ 0-3-3-2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Aus (b) wissen wir, dass $\text{Bild}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^2$. Benutzen wir die Dimensionsformel, erhalten wir

$$\dim(\text{Kern}(\mathbf{A})) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(\text{Bild}(\mathbf{A})) = 3\,.$$

Da $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ linear unabhängig sind:

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0\,,$$

fehlt uns noch ein Basisvektor. Wer bemerkt, dass in der ersten Zeile von $\mathbf{A}$ x_2 fehlt und in der zweiten Zeile x_1, der kann ohne grossen Aufwand einen dritten Vektor $\mathbf{v}_3$ im Kern konstruieren, z.B.

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da gilt, dass

$$\begin{aligned} & & \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \quad & I.\ (\text{Zeile } 1) & \lambda_1 &= 2\lambda_3 \\ & II.\ (\text{Zeile } 5) & \lambda_1 &= 4\lambda_2 \\ & III.\ (\text{Zeile } 3) & 0 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \overset{I.\&II.}{=} \frac{7}{4}\lambda_1 \\ \Rightarrow \quad & & \lambda_1 = \lambda_2 &= \lambda_3 = 0\,, \end{aligned}$$

sind $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ linear unabhängig. Wir haben mit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ somit eine Basis gefunden.

3. Zwei radioaktive Stoffe mit Halbwertszeiten $\lambda_1 = 1$ respektive $\lambda_2 = 2$ werden in einem Stoffgemisch festgestellt. Wir wollen nun wissen, in welchem Verhältnis die beiden Stoffe zum Zeitpunkt $t = 0$ gemischt sind.
Dazu messen wir zu verschiedenen Zeitpunkten t_i die Intensität $I(t_i)$ der Strahlung des Gemisches. Aus den obigen Angaben folgt, dass sich die Intensität als Funktion der Zeit folgendermassen verhält:

$$I(t) = x_1 2^{-t/\lambda_1} + x_2 2^{-t/\lambda_2}\,, \tag{1}$$

wobei wir die Halbwertszeiten $\lambda_1 = 1$ respektive $\lambda_2 = 2$ der beiden Stoffe kennen. x_1 und x_2 sind die unbekannten Mengen der beiden Stoffe zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Messungen ergeben folgende Werte:

$$\begin{array}{c||c|c|c} t_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline I(t_i) & 4 & 2 & \frac{1}{2} \end{array} \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, welches aus den obigen Bedingungen (1) und (2) resultiert.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem im Sinne der kleinsten Quadrate.

(c) Nehmen Sie an, dass die Stoffmengen x_1, x_2, welche Sie in (b) erhalten haben, die wahren Werte sind. Wie gross sind dann die relativen Fehler der gemessenen Intensitäten in (2)?

Lösung:

(a) Setzen wir die Daten aus (1) in (2) ein, erhalten wir das gesuchte Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Wir stellen die Normalengleichung

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

auf, welche wir dann mithilfe des Gaussalgorithmus lösen, um die Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate zu erhalten:

$$\begin{pmatrix} \frac{21}{2^4} & \frac{9+2\sqrt{2}}{2^3} \\ \frac{9+2\sqrt{2}}{2^3} & \frac{7}{2^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{2^3} \\ \frac{17}{2^2} + \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{Vereinfachung: } 2^4 \cdot I.,\ 2^3 \cdot II.$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 18 + 4\sqrt{2} \\ 9 + 2\sqrt{2} & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ 34 + 8\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{Gauss: } II. - \frac{9 + 2\sqrt{2}}{21} \cdot I.$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 18 + 4\sqrt{2} \\ 0 & \frac{116-72\sqrt{2}}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ \frac{-24+4\sqrt{2}}{21} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad x_2 = \frac{-24+4\sqrt{2}}{116-72\sqrt{2}} \approx -1.294,$$

$$x_1 = \frac{1}{21}\left(82-\left(18+4\sqrt{2}\right)x_2\right) \approx 5.362.$$

Somit erhalten wir die Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5.362 \\ -1.294 \end{pmatrix}$$

im Sinne der kleinsten Quadrate.

(c) Wir nennen die Messdaten nun I_i und bezeichnen mit $I(t_i)$ den wahren Wert der Intensität zum Zeitpunkt t_i. Die relativen Fehler bezüglich der Messdaten sind:

$$\frac{|I(t_i)-I_i|}{|I(t_i)|}, \qquad i \in \{1,2,3\}, \text{ also:}$$

1. $$\frac{|x_1+x_2-4|}{|x_1+x_2|} \approx 0.017\,,$$
2. $$\frac{|x_1\cdot\frac{1}{2}+x_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-2|}{|x_1\cdot\frac{1}{2}+x_2\cdot\frac{1}{4}|} \approx 0.132\,,$$
3. $$\frac{|x_1\cdot\frac{1}{4}+x_2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}|}{|x_1\cdot\frac{1}{4}+x_2\cdot\frac{1}{16}|} = 0.279\,,$$

4. Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem abhängig vom reellen Parameter α:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 1\,x_1 & + & \frac{2}{5}\,x_2 & - & \frac{2}{5}\,x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 7\,x_3 & & & = & 1 \\ \frac{5}{2}\,x_1 & & & - & \frac{3}{2}\,x_3 & - & 2\,x_4 & = & \alpha \\ & & 2\,x_2 & - & 4\,x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

(a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem als Tableau (Schema) für die **LR**-Zerlegung und berechnen Sie den ersten Schritt der **LR**-Zerlegung mit Spaltenmaximumsstrategie. Vergessen Sie nicht, zusätzlich zum veränderten Schema die Matrix $\mathbf{L}_1$ und die Permutationsmatrix $\mathbf{P}_1$ für den ersten Schritt anzugeben.

(b) Gegeben seien folgende Enddaten für die **LR**-Zerlegung mit Spaltenmaximumsstrategie von (3):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von α besitzt das Gleichungssystem (3) genau eine, unendlich viele bzw. keine Lösung?
Bestimmen Sie die Lösungsmenge zu denjenigen α, für die das Gleichungssystem lösbar ist.

Lösung:

(a) Wir schreiben das Gleichungssystem als Schema:

$$\begin{array}{|cccc|cccc|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 4 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Wir wenden nun den ersten Schritt der **LR**-Zerlegung mit Spaltenmaximumsstrategie an. In der ersten Spalte ist der Eintrag der zweiten Zeile am grössten, deshalb vertauschen wir die erste mit der zweiten Zeile und wenden einen Gaussschritt an, wobei wir die Faktoren, mit welchen wir die erste Zeile multiplizieren und anschliessend von der aktuellen Zeile abziehen, direkt anstatt dem neuen Null-Wert für unsere **L**-Matrix abspeichern:

$$\begin{array}{|cccc|c|ccc|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & -7 & 0 & 1 \\ \cline{5-5} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 1 & -6 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 2 & -2 & \alpha - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 4 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Somit erhalten wir nach dem ersten Schritt

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen als erstes $\mathbf{Pb}$, danach führen wir die Vorwärtssubstitution $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$ durch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ \alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Indem wir nun die Rückwärtssubstitution auf $\mathbf{y}$ anwenden ($\mathbf{Rx} = \mathbf{y}$), erhalten wir die Lösung des linearen Gleichungssystems (3):

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ \alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir stellen fest, dass es für $\alpha \neq \frac{1}{2}$ keine Lösung gibt, da dann die vierte Gleichung lautet

$$0 = \alpha - \frac{1}{2},$$

wobei die rechte Seite ungleich Null ist. Diese Bedingung ist nie erfüllt. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ bekommen wir unendlich viele Lösungen, nämlich

$$\mathbb{L}_{1/2} = \{\mathbf{x} = (\frac{22}{5}t + \frac{2}{25}, 10t - \frac{2}{5}, 6t - \frac{1}{5}, t)^T \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Genau eine Lösung gibt es nie.

5. Gegeben sei folgendes lineares Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= -4x_1 + 4x_2 + x_3.\end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.

(c) Bestimmen Sie eine Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ mit der Eigenschaft, dass die Lösung des Systems für $t \to \infty$ gegen $\mathbf{0}$ konvergiert:

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0\,.$$

Lösung:

(a) Wir schreiben das gegebene Differentialgleichungssystem in der gewünschten Form:

$$\dot{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Wir bestimmen nun die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ indem wir das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ betrachten und dessen Nullstellen bestimmen:

$$\begin{aligned}p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -4 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}\\ &= -\lambda \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}\\ &= (\lambda^2 - 4)(1-\lambda) = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-1)\,.\end{aligned}$$

Die Nullstellen von $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ resp. Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind somit

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -2.$$

Wir berechnen die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^{(1)} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}\,.$$

Für den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ erhalten wir analog:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^{(2)} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}\,.$$

Für $\lambda_3 = -2$ erhalten wir schliesslich:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(3)} \\ v_2^{(3)} \\ v_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^{(3)} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\}\,.$$

(b) Die allgemeine Lösung des Systems lautet für frei wählbare c_1, c_2, $c_3 \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^{(1)} + c_2 \mathbf{e}^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^{(2)} + c_3 \mathbf{e}^{\lambda_3 t}\mathbf{v}^{(3)}\,, \quad \text{also}$$

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \mathbf{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \mathbf{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\,. \tag{4}$$

(c) Da wir in **(b)** bereits die allgemeine Lösung berechnet haben, müssen wir nur noch die Konstanten c_1 und c_2 und c_3 bestimmen, sodass

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0\,.$$

Wir wählen $c_1 = c_2 = 0$, da sonst für $t \to \infty$ die ersten beiden Terme in (4) explodieren. c_3 kann beliebig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gewählt werden (z.B. $c_3 = 1$). Die Anfangsbedingung erhalten wir durch einsetzen von $t = 0$ in (4):

$$\mathbf{x}(0) = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{v}^{(3)}.$$

6. Wir betrachten zwei Spaltenvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ ungleich $\mathbf{0}$ im $\mathbb{R}^n$, deren Skalarprodukt $(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \mathbf{u}^T\mathbf{v}$ nicht gleich -1 ist.

   (a) Berechnen Sie die Matrizen $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ und $\left(\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^2$ für den Fall

   $$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

   und bestimmen Sie deren Rang.

   (b) Wie viele Zeilen und Spalten hat die Matrix $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ allgemein? Zeigen Sie, dass gilt

   $$\left(\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^2 = c\mathbf{u}\mathbf{v}^T \text{ für ein } c \in \mathbb{R}.$$

   Bestimmen Sie c.

   (c) Zeigen Sie, dass gilt

   $$\left(\mathbf{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = \mathbf{I}_n - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{u}}. \tag{5}$$

Lösung:

(a) Wir berechnen $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$:

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe des Gauss Algorithmus kann man alle Zeilen bis auf die Erste eliminieren. Somit gilt

$$\mathrm{Rang}(\mathbf{u}\mathbf{v}^T) = 1\,.$$

Wir berechnen als nächstes $\left(\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)$:

$$\left(\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^2 = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ 18 & -18 & 36 \\ 24 & -24 & 48 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe des Gauss Algorithmus kann man wiederum alle Zeilen bis auf die Erste eliminieren. Somit gilt

$$\mathrm{Rang}\left(\left(\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^2\right) = 1\,.$$

(b) Im Allgemeinen hat die Matrix $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ n Zeilen und n Spalten. Wir berechnen $\left(\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^2$:

$$\left(\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^2 = \mathbf{u}\,\underbrace{\mathbf{v}^T\mathbf{u}}_{=(\mathbf{v},\mathbf{u})}\,\mathbf{v}^T = (\mathbf{v},\mathbf{u})\,\mathbf{u}\mathbf{v}^T\,.$$

Somit gilt $c = (\mathbf{v},\mathbf{u})$.

(c) Um die Gleichung (5) zu verifizieren, zeigen wir, dass für $\mathbf{B} = \mathbf{I}_n - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{u}}$ folgendes gilt:

$$\left(\mathbf{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)\mathbf{B} = \mathbf{I}_n\,, \tag{6}$$

Wir zeigen (6), indem wir die Definition von $\mathbf{B}$ einsetzen und umformen:

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)\mathbf{B} &= \left(\mathbf{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)\left(\mathbf{I}_n - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{u}^T\mathbf{v}}\right) \\
&= \left(\mathbf{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right) - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T - \left(\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^2}{1+\mathbf{u}^T\mathbf{v}} \\
&\overset{(b)}{=} \mathbf{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T - \frac{\left(1-(\mathbf{v},\mathbf{u})\right)\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+(\mathbf{v},\mathbf{u})} = \mathbf{I}_n\,.
\end{aligned}$$

Somit ist die Identität bewiesen.