Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik D-BAUG

Winter 2015

Prof. R. Hiptmair

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum	30.01.2015	

1	2	3	4	Total
19P	18P	15P	12P	64P

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, den Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Selbständig verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, nicht ausgedruckt, nicht kopiert.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und legen Sie es weg.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**

Viel Erfolg!

Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik D-BAUG

Winter 2015

Prof. R. Hiptmair

Die Lösungswege müssen, abgesehen von Aufgabe 1, nachvollziehbar dargestellt sein.

Regeln Multiple Choice:

- *Es muss keine Begründung gegeben werden. Bemerkungen und Rechnungen auf dem Blatt haben keinen Einfluss auf die Punkte.*
- *Für jedes richtige Kreuz gibt es einen oder zwei Punkte (beachten Sie die Angaben in jeder Teilaufgabe), jedes falsche Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Falls eine negative Gesamtpunktzahl für eine Teilaufgabe* 1a) − 1e) *erreicht wird, so werden für diese Teilaufgabe null Punkte vergeben.*

1. (Multiple Choice) Gegeben sei die folgende schlecht dokumentierte MATLAB-Funktion:

```matlab
1  function [D, V] = WhatDoIDo(A)
2  if ( size(A) ~= [2, 2] )
3      error('Input A erfuellt die Annahmen nicht!')
4  end
5
6  s = A(1,1)^2+A(1,2)^2+A(2,1)^2+A(2,2)^2;
7  d = A(1,1) * A(2,2) - A(1,2) * A(2,1);
8  t = A(1,1) + A(2,2);
9
10 x1 = (t + sqrt(t^2 - 4*d))/2;
11 x2 = (t - sqrt(t^2 - 4*d))/2;
12
13 if ( (A(1,2)^2+A(2,1)^2) <= 1E-12*s )
14   v1 = [1; 0];
15   v2 = [0; 1];
16 elseif ( abs(A(1,2)) >= abs(A(2,1)) )
17   v1 = [A(1,2); x1 - A(1,1)];
18   v2 = [A(1,2); x2 - A(1,1)];
19 else
20   v1 = [x1 - A(2,2); A(2,1)];
21   v2 = [x2 - A(2,2); A(2,1)];
22 end
23 v1 = v1/norm(v1);
24 v2 = v2/norm(v2);
25 V = [v1, v2];
26 D = [x1, 0; 0, x2];
27
28 figure;
29 plot([0, x1 * v1(1)], [0, x1 * v1(2)], '--ob', ... % gestrichelte Linie
30      [0, x2 * v2(1)], [0, x2 * v2(2)], '->b');     % durchgezogene Linie
31 xlabel('erste Koordinate'); ylabel('zweite Koordinate');
32 legend('Graph 1', 'Graph 2');
33 grid on;
34 axis equal;
```

Ziel der Aufgabe ist es, diesen MATLAB-Code zu verstehen.

a) [$3P$ ($1P$ pro richtiges Kreuz)] Wir bezeichnen das Argument `A` der Funktion `WhatDoIDo` im Folgenden mit $\mathbf{A}$. Welche Voraussetzungen muss $\mathbf{A}$ erfüllen, damit der Code nicht ohne Fehler abbricht? Kreuzen Sie an, ob die folgenden Voraussetzungen richtig oder falsch sind.

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1,2}$, so dass $\mathbf{A} = \big(2, 2\big)$.	○ Richtig.	○ Falsch.
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, mit $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$.	○ Richtig.	○ Falsch.
$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, mit $m = n = 2$.	○ Richtig.	○ Falsch.

b) [$5P$ ($1P$ pro richtiges Kreuz)] Seien $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$p_{\mathbf{A}}(x) = \det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ darstellt ($\mathbf{I}$ ist die Einheitsmatrix in geeigneter Dimension). Welche Grösse repräsentiert `d` aus Zeile 7 des Codes?

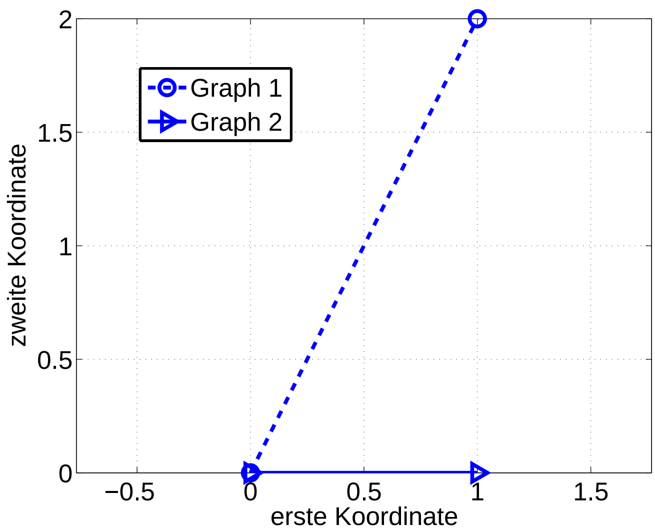

Abbildung 1: Plotausgabe von `WhatDoIDo(`**A**`)` (Teilaufgabe (1c)).

`d` $=$ det(**A**) . ○ Richtig. ○ Falsch.

`d` $=$ Rang(**A**) . ○ Richtig. ○ Falsch.

`d` $= a_0$. ○ Richtig. ○ Falsch.

`d` $= a_1$. ○ Richtig. ○ Falsch.

`d` $= a_2$. ○ Richtig. ○ Falsch.

c) [6P (2P pro richtiges Kreuz)] Wir betrachten die Plotausgabe des MATLAB-Codes in Abbildung 1 zur Eingabe **A**. Was stellen Graph 1 und Graph 2 in Abbildung 1 dar?

`v1` und `v2` aus den Zeilen 23 und 24 des Codes. ○ Richtig. ○ Falsch.

Alle Eigenvektoren von **A**. ○ Richtig. ○ Falsch.

Diejenigen Eigenvektoren von **A**, welche genau die Länge des zugehörigen Eigenwerts besitzen.

○ Richtig. ○ Falsch.

d) [$2P$ ($2P$ pro richtiges Kreuz)] Kreuzen Sie diejenigen der unten stehenden Aussagen an, welche richtig sind. $\mathbf{A}$ bezeichnet die Matrix, welche der Funktion übergeben wird.

○ $\mathbf{A}$ ist aufgrund von Abbildung 1 gemeinsam mit der Kenntnis des MATLAB-Codes nicht eindeutig bestimmt.

○ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

○ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

○ $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

e) [$3P$ ($1P$ pro richtiges Kreuz)] Kreuzen Sie an, welche der unten genannten Aussagen für die Eingabematrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für `WhatDoIDo` zutreffen; `V` und `D` sind die Rückgabewerte der Funktion:

○ $\mathtt{D}= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.   ○ $\mathtt{D}= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.   ○ $\mathtt{D}= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

○ $\mathtt{V}= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.   ○ $\mathtt{V}= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.   ○ $\mathtt{V}= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

○ $\mathtt{V}^{-1}\mathbf{A}\,\mathtt{V} = \mathtt{D}$.   ○ $\mathtt{V}\mathbf{A}\,\mathtt{V}^{-1} = \mathtt{D}$.

○ Die Spalten von `V` aus Zeile 24 der MATLAB-Funktion enthalten normierte Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.

○ $\mathbf{A}$ ist diagonalisierbar.

2. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$ und $\|\cdot\|$ die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm. Für festes

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,, \ \boxed{\|a\| = 1},$$

sei die Abbildung D, mit

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{D} : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \, \mathbf{a} \end{array}$$

gegeben.

a) $[3P]$ Ist die Abbildung D linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

2a)

b) [5P] Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{D}$ von D bezüglich der Kartesischen Basis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{E} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hinweis: Seien $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, dann ist das Vektorprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ gegeben durch

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_2 \end{pmatrix}.$$

2b)

c) [$2P$] Was versteht man unter einer Orthonormalbasis eines Vektorraums $(V, +, \cdot)$ versehen mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

2c)

d) [$8P$] Zeigen Sie, dass D eine Isometrie des Euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ ist.

2d)

3. Wir betrachten die folgende Menge $\mathcal{M}$ von 2×2-Matrizen:

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \; : \; \begin{aligned} m_{11} + m_{12} &= 0, \\ m_{21} + m_{22} &= 0, \\ m_{11} + m_{21} &= 0, \\ m_{12} + m_{22} &= 0. \end{aligned} \right\}. \tag{1}$$

a) [1P] Definieren Sie den Kern einer Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

3a)

b) [4P] Die Matrizenmenge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{2,2}$ lässt sich auch wie folgt charakterisieren:

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \; : \; \mathbf{A} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\} ,$$

für eine geeignete Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4,4}$. Geben Sie eine solche Matrix $\mathbf{A}$ an.

3b)

c) [5P] Zeigen Sie, dass auch folgende Charakterisierung gilt:

$$\mathcal{M} = \{\alpha \mathbf{M}_0 \; : \; \alpha \in \mathbb{R}\} \ ,$$

für eine geeignete Matrix $\mathbf{M}_0 \in \mathbb{R}^{2,2}$. Geben Sie ein mögliches $\mathbf{M}_0$ an.

3c)

d) [5P] Welche Vektoren liegen im Kern <u>aller</u> Matrizen der Menge $\mathcal{M}$, welche in (1) definiert ist?

3d)

4. Für zwei reelle Zahlen a, $b \in \mathbb{R}$ sei $\mathrm{T}_{a,b} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ eine lineare Abbildung, die bezüglich der Kartesischen Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{E}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ bzw. } \mathcal{E}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

die Matrixdarstellung

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

hat.

a) [$6P$] Was ist der Rang von $\mathbf{M}$ in Abhängigkeit von a und b? Führen Sie geeignete Fallunterscheidungen durch.

4a)

b) [2P] Sei nun S die Verbindungsstrecke der Punkte

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Nehmen Sie an, dass gilt $a = 3$, $b = 1$. Was ist die Länge von $\mathrm{T}_{3,1}(S) \subset \mathbb{R}^2$ (bezüglich des Euklidischen Skalarproduktes)?

4b)

c) [4*P*] Nehmen Sie an, dass gilt $a = 3$, $b = 1$. Geben Sie eine Strecke $N \subset \mathbb{R}^3$ mit positiver Länge $\|N\| > 0$ an, für die gilt

$$\mathrm{T}_{3,1}(N) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Hinweis: Um die Strecke anzugeben genügt es, ihre Endpunkte zu spezifizieren. Sie brauchen nur einen Vektor in $\mathrm{Kern}(\mathrm{T}_{3,1})$ zu berechnen.

4c)