R. Hiptmair
S. Pintarelli
E. Spindler

Herbstsemester 2014

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Prüfung
Sommer 2015

		Note
Name		
Vorname		
Leginummer		
Datum	14.08.2015	

1	2	3	4	5	6	7	Total
4P	6P	4P	8P	8P	10P	15P	55P

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, den Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Selbständig verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, nicht ausgedruckt, nicht kopiert.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und legen Sie es weg.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Blockmatrixkalkül [4 points]

Geben Sie jeweils für die Matrix $\mathbf{M}$ eine explizite Darstellung als Blockmatrix an. Dabei sind $\mathbf{A}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$, wobei $\mathbf{A}$ invertierbar ist. Weiter bezeichnen wir die Nullmatrix in $\mathbb{R}^{n,n}$ mit $\mathbf{O}_n$ und die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n,n}$ mit $\mathbf{I}_n$.

(1a) [2 points]

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} .$$

(1b) [2 points]

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}^{k} , \quad k \in \mathbb{N} .$$

Aufgabe 2 Matrizen mit gleichem Kern und Bild [6 points]

(2a) [4 points] Welche notwendigen Bedingungen müssen Paare (m, n) natürlicher Zahlen erfüllen, damit es Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ so gibt, dass gilt

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{A}).$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(2b) [2 points] Geben Sie ein Beispiel an für ein Paar $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ und eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ für welche gilt $m, n \geq 2$ und $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{A})$.

Aufgabe 3 Kern und Bild symmetrischer Matrizen [4 points]

Wir betrachten eine allgemeine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

(3a) **[2 points]** Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A})^{\perp} \subset \mathrm{Kern}(\mathbf{A})\,.$$

(3b) **[2 points]** Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \subset \mathrm{Bild}(\mathbf{A})^{\perp}\,.$$

Anmerkung: $\mathcal{V}^{\perp}$ bezeichnet das orthogonale Komplement von $\mathcal{V}$ bezüglich des Euklidischen Skalarproduktes.

Aufgabe 4 Term einer linearen Iteration mit MATLAB [8 points]

Wir untersuchen die MATLAB-Funktion aus Listing 4.1.

Listing 4.1: MATLAB-Funktion getit

```
function y = getit(A, x, k)
[S,D] = eig(A);
y = S*diag(diag(D).^k) * (S\x);
end
```

Tipp: MATLAB gibt bei der Eingabe von `help eig` folgende Ausgabe zurück:

```
[V,D] = eig(A) produces a diagonal matrix D of eigenvalues and
a full matrix V whose columns are the corresponding eigenvectors
so that A*V = V*D.
```

Tipp: Die MATLAB-Funktion `diag(x)` erzeugt angewandt auf einen Vektor `x` eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen aus `x`. `diag(M)` angewandt auf eine $n \times n$ Matrix `M` gibt einen Vektor mit den Diagonaleinträgen von `M` zurück.

Tipp: Die Operation `v.^k` für einen Spaltenvektor `v` liefert den Spaltenvektor gleicher Grösse, dessen Komponenten die k. Potenzen der Komponenten von `v` sind.

(4a) [4 points] Welche Ausgabe liefert `getit`, wenn im Argument `A` eine diagonalisierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ übergeben wird, im Argument `x` ein Spaltenvektor $\mathbf{x}$ der Länge n und in `k` eine Zahl $k \in \mathbb{N}$?

(4b) [4 points] Sei $k \in \mathbb{N}$ fixiert. Diskutieren Sie im Detail den asymptotischen Rechenaufwand der MATLAB-Funktion `getit` in Abhängigkeit von der Matrixgrösse n für grosse Werte von n.

Aufgabe 5 Markov-Kette: Zustände von Proteinen [8 points]

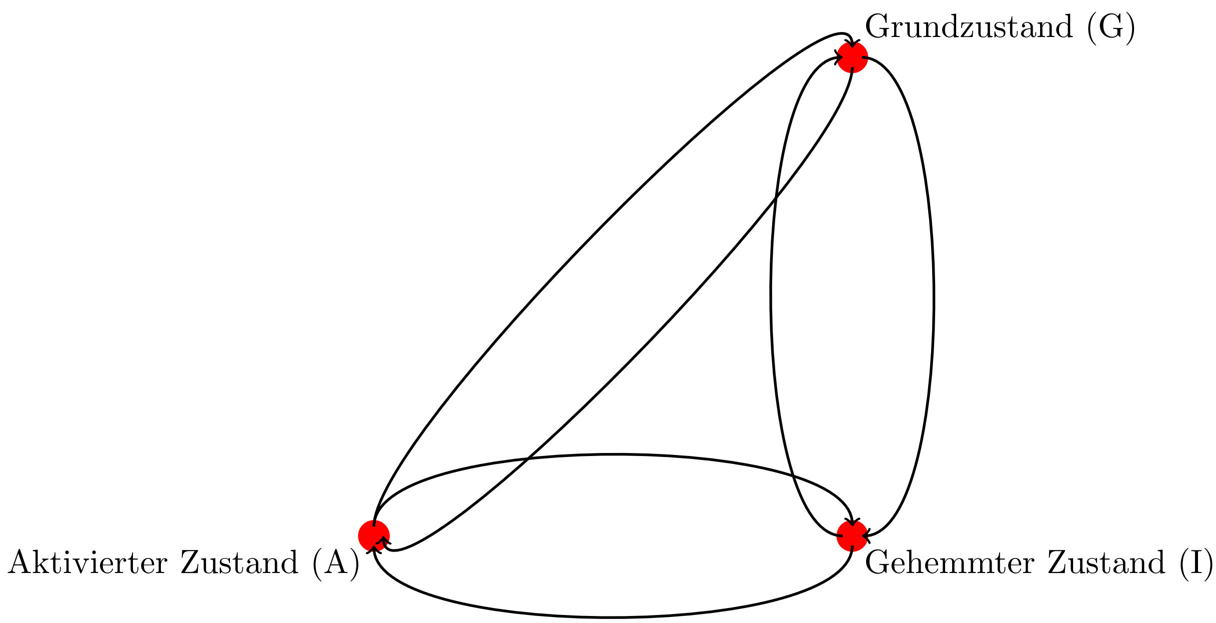

Abbildung 5.1: Skizze der verschiedenen Zustände des Proteins aus Aufgabe 5.

Wir betrachten ein Protein, welches in Lösung in drei möglichen Zuständen vorliegt:

- Grundzustand (G)
- Aktivierter Zustand (A)
- Gehemmter Zustand (I)

Aus reaktionskinetischen Überlegungen weiss man, dass in einer Nanosekunde

- 80% der aktivierten Moleküle in den Grundzustand übergehen.
- Ein Übergang vom aktivierten in den gehemmten Zustand nicht stattfindet.
- 10% der Moleküle im Grundzustand in den aktivierten Zustand und 10% in den gehemmten Zustand übergehen.
- 50% der Moleküle aus dem gehemmten Zustand in den Grundzustand und 5% in den aktivierten Zustand zurückkehren.

(5a) **[2 points]** Vervollständigen Sie die Skizze aus Abbildung 5.1, indem Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten der Übergänge zwischen den verschiedenen Zuständen eintragen. Die Übergänge sind bereits durch die Pfeile symbolisiert.

(5b) [2 points] Geben Sie die Gleichung für die Markov-Kette $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots$ an, welche die Evolution der Proteinzustände beschreibt. Nehmen Sie dabei an, dass gilt

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} G^{(k)} \\ I^{(k)} \\ A^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 ,$$

wobei $G^{(k)}$ den Anteil von Molekülen im Zustand (G) nach k Nanosekunden repräsentiert und analog $I^{(k)}$ und $A^{(k)}$ den Anteil von Molekülen in den Zuständen (I) respektive (A) nach k Nanosekunden darstellen.

(5c) [4 points] Welche Anteile der einzelnen Zustände liegen nach langer Zeit in stabiler Lösung vor?

Aufgabe 6 Schätzen von Übertragungskanalparametern [10 points]

Gesendet wird ein zeitdiskretes Signal $x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}$ endlicher Dauer, $x_j \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$. Nach der Übertragung empfängt man das Signal $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Wir nehmen an, dass folgende Beziehung zwischen dem gesendeten und dem empfangenen Signal besteht:

$$y_j = \alpha x_j + \beta x_{j+1} + \gamma x_{j+2}\ , \quad j = 1, \ldots, m\ , \tag{6.1}$$

mit noch unbekannten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(6a) [2 points] Welches überbestimmte lineare Gleichungssystem wird gemäss (6.1) von

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

erfüllt, wenn Modell- oder Messfehler ausgeschlossen werden?

(6b) [3 points] Für $k \in \{1, \ldots, m+2\}$ betrachten wir den Spezialfall des Signals $x_1, \ldots, x_{m+2}$, mit

$$x_j = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \in \{1, \ldots, m+2\} \setminus \{k\} \end{cases}.$$

Für welche $k \in \{1, \ldots, m+2\}$ ist die kleinste-Quadrate-Lösung des überbestimmten linearen Gleichungssystems aus Teilaufgabe (6a) eindeutig?

(6c) [5 points] Was sind die zugehörigen Normalengleichungen zum überbestimmten linearen Gleichungssystem aus Teilaufgabe (6a)? Geben Sie die Einträge der Koeffizientenmatrix der Normalengleichungen und die Komponenten des Rechte-Seite-Vektors der Normalengleichungen explizit in Abhängigkeit von den Daten $x_1, \ldots, x_{m+2}$ und $y_1, \ldots, y_m$ an.

Aufgabe 7 MATLAB: Householder Reflektionen [15 points]

Ihnen wird die MATLAB-Funktion

```
function Z = houserefl(v)
```

aus Listing 7.1 vorgelegt.

Listing 7.1: MATLAB-Funktion aus Aufgabe 7

```
1  function Z = houserefl(v)
2  % Eingabe: v:   Spaltenvektor, v in R^n \ {0}
3  n = size(v,1); % Laenge des Vektors v
4  w = v/norm(v);
5  u = w + [1;zeros(n-1,1)];
6  q = u/norm(u);
7  X = eye(n) - 2*q*q';
8  % Extrahiert die letzten n-1 Spalten von X
9  Z = X(:,2:end);
10 end
```

(7a) [3 points] Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{X}$, welche in Zeile 7 des Codes in Listing 7.1 erstellt wird, folgende Identität erfüllt:

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \mathbf{I}_n \,.$$

Tipp: Es gilt $\|\mathbf{q}\|^2 = 1$.

(7b) [4 points] Zeigen Sie, dass die erste Spalte der in der Variablen `X` gespeicherten Matrix $\mathbf{X}$ (nach Ausführung von Zeile 7 der MATLAB-Funktion `houserefl` aus Listing 7.1) ein Vielfaches des Argumentvektors $\mathbf{v}$ ist.

Tipp: Es gilt $\|\mathbf{q}\| = q_1^2 + \cdots + q_n^2 = 1$, mit $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$. Verwenden Sie weiter, dass gilt $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, wobei $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ und folglich $\|\mathbf{w}\|^2 = 1$.

(7c) [3 points] Welche Eigenschaft hat die Menge der Spalten der Rückgabematrix der MATLAB-Funktion `houserefl` aus Listing 7.1? Was ist demzufolge der Zweck dieser MATLAB-Funktion?

Tipp: Sie können die Resultate der Teilaufgaben (7a) und (7b) verwenden.

(7d) [2 points] Was ist die asymptotische Komplexität der MATLAB-Funktion `houserefl` aus Listing 7.1 in Abhängigkeit von der Länge n des Eingabevektors für $n \to \infty$?

(7e) [3 points] Ersetzen Sie Zeilen 3-7 im Code aus Listing 7.1 durch den Aufruf einer einzigen Standardfunktion von `Matlab`. Wie lautet die entsprechende Codezeile?