Prüfung
Lineare Algebra und Numerische Mathematik
Sommer 2011
Prof. Dr. D. Stoffer

Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht. Die Lösungswege müssen nachvollziehbar dargestellt sein.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

---

1. Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ -(b+1)x & + & (a-b)y & + & 2(b-2)z & = & -2 \\ 2x & - & (a-1)y & + & az & = & 4-b \end{array}$$

mit den drei Unbekannten x, y, z und den beiden Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem als Tableau und führen Sie einen Eliminationsschritt des Gauss-Verfahrens durch. Wählen Sie dabei das Element in der ersten Zeile und ersten Spalte als Pivot.

(b) Durch Weiterführung des Gauss-Verfahrens kann das Schema

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & a+1 & -6 & 2b \\ 0 & 0 & a-2 & b \end{array}$$

erreicht werden. Bestimmen Sie für alle möglichen Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge.

2. **(a)** Sei $c > 0$ gegeben. Bestimmen Sie die Konditionszahl des Problems

$$H(x) = \sqrt{c+x} - \sqrt{c}.$$

(b) Zeigen Sie, dass das Problem H für alle $x > 0$ gut konditioniert ist. Bestimmen Sie insbesondere $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \chi_H(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \chi_H(x)$.

(c) Bestimmen Sie für $a, b > 0$ die Konditionszahl der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2(a-1) & 0 \\ a-1 & 2a+1 & 2a \\ a+2 & a+1 & a+2 \end{pmatrix}.$$

(**a**) Bestimmen Sie die Determinante von A.

(**b**) Setzen Sie $a = 2$ und überprüfen Sie, ob $v = (2, -3, 1)^\mathsf{T}$ bzw. $w = (0, 1, -1)^\mathsf{T}$ Eigenvektoren von A sind. Falls ja, geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

(**c**) Setzen Sie $a = 1$ und bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

4. An den Stellen x_i, y_i, z_i werden folgende Werte T_i gemessen:

i	1	2	3	4	5	6
x_i	2	0	1	1	1	1
y_i	-2	2	-1	1	-3	-1
z_i	-1	1	0	0	-1	-1
T_i	4	-2	3	-1	5	1

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c der Funktion $T(x, y, z) = ax + by + cz$ so, dass die Summe der Fehlerquadrate minimiert wird.

5. Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1-a \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(**a**) Bestimmen Sie für $a = 1$ die allgemeine Lösung.

(**b**) Für welche reellen Parameter $a \neq 0$ bleiben alle Lösungen $x(t)$ für $t \to \infty$ beschränkt?

6. Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$Ax = b + \varepsilon f(x), \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad f(x) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = 0.1.$$

Das System soll iterativ nach folgender Vorschrift gelöst werden:

(i) Wir wählen die Lösung $x^{(0)}$ des linearen Gleichungssystems $Ax^{(0)} = b$ als Startwert.

(ii) Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ bestimmen wir $x^{(k)}$ so, dass $Ax^{(k)} = b + \varepsilon f(x^{(k-1)})$.

(**a**) Berechnen Sie $x^{(0)}$, $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ auf 5 signifikante Stellen genau.

(**b**) Formulieren Sie die obige Lösungsvorschrift als Fixpunktiteration $x^{(k)} = F\big(x^{(k-1)}\big)$ und geben Sie F an.

(**c**) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $F'(x)$ sowie deren Norm $\|F'(x)\|_2$.

(**d**) Schätzen Sie die Abweichung $\|x^{(2)} - x^*\|_2$ der Approximation $x^{(2)}$ von der exakten Lösung x^* des nichtlinearen Gleichungssystems ab.

Viel Erfolg!