Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik D-BAUG

Sommer 2014

Prof. R. Hiptmair

Name		Note
Vorname		
Studiengang		
Leginummer		
Datum	13.08.2014	

1	2	3	4	Total
12P	24P	26P	22P	84P

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und legen Sie es weg.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Eigenhändig verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, nicht ausgedruckt, nicht kopiert.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen umrahmten Felder ("Lösungsrahmen"). Sollte der Platz nicht ausreichen, kann die Lösung auf einem separaten Blatt fortgesetzt werden. Das separate Blatt muss mit Ihrem Namen versehen werden und es muss klar erkennbar sein, um welche Teilaufgabe es sich handelt. Im Lösungsrahmen muss zusätzlich folgender Vermerk angebracht werden: "Fortsetzung siehe separates Blatt".**

Viel Erfolg!

Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik D-BAUG

Sommer 2014

Prof. R. Hiptmair

- **Zu jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Punkte angegeben.**
- **Die Anzahl der Punkte liefert Ihnen einen Anhaltspunkt, wie umfangreich die Lösung sein sollte.**
- **Die Lösungswege müssen, abgesehen von Aufgabe 1, möglichst klar und nachvollziehbar dargestellt sein.**

Regeln Multiple Choice:

- *Es muss keine Begründung gegeben werden. Bemerkungen und Rechnungen auf dem Blatt haben keinen Einfluss auf die Punkte.*
- *Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, jedes falsche Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Falls eine negative Gesamtpunktzahl für eine der Teilaufgaben 1a) - 1b) erreicht wird, werden für diese Teilaufgabe null Punkte vergeben.*

1. (Multiple Choice: Sparse-Format in MATLAB, Kern, Bild) (12P Total)

   Wir betrachten MATLAB-Funktionen der allgemeinen Form

   ```
   function y = f(v, x),
   ```

   welche zwei Spaltenvektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{x}$ der Länge $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, als Argumente `v` und `x` nehmen und einen Spaltenvektor $\mathbf{y}$ der Länge $m \in \mathbb{N}$ zurückgeben ($m \neq n$ ist durchaus möglich!). Für *festen* Parametervektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ realisieren diese Funktionen Abbildungen $\mathsf{F}_\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$.

   Kreuzen Sie an, ob die Aussagen über die Abbildung $\mathsf{F}_\mathbf{v} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ für die im Folgenden konkret gegebenen Funktionen richtig oder falsch sind.

Hinweis: Hier ein Auszug aus der Dokumentation der MATLAB-Funktion `sparse`:

> `S = sparse(i,j,s,m,n,nzmax) uses vectors i, j, and s to generate an m-by-n sparse matrix such that S(i(k),j(k)) = s(k), with space allocated for nzmax nonzeros. Vectors i, j, and s are all the same length. Any elements of s that are zero are ignored, along with the corresponding values of i and j. Any elements of s that have duplicate values of i and j are added together.`

a) (5P)

```
function y = f(v, x)
n = length(v);
y = sparse(2:n, 1:n-1, [v(n-2:-1:1) + v(n-1), v(n)], n, n)*x;
```

i) $\mathsf{F}_{\mathbf{v}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ ist linear. ○ Richtig. ○ Falsch.

ii) $$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & v_{n-2}+v_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & v_{n-3}+v_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & v_1+v_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & v_n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

○ Richtig. ○ Falsch.

iii) $$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ v_{n-2}+v_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & v_{n-3}+v_{n-1} & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & v_1+v_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & v_n & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

○ Richtig. ○ Falsch.

iv) Es gibt ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, so dass für den Kern von $\mathsf{F}_{\mathbf{v}}$ gilt : $\mathrm{Kern}(\mathsf{F}_{\mathbf{v}}) = \{\mathbf{0}\}$.

○ Richtig. ○ Falsch.

v) $\mathsf{F}_{\mathbf{v}}$ hat nie vollen Rang. ○ Richtig. ○ Falsch.

b) (7P)

```
function y = f(v, x)
n = length(v);
u = ones(n,1);
w = [v(1:2:n,1); v(2:2:n,1)];
y = w * u' * x;
```

i) $\mathsf{F}_{\mathbf{v}} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ ist linear. ○ Richtig. ○ Falsch.

ii) Für $n \in \mathbb{N}$ gerade, gilt

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} v_1 & v_3 & \dots & v_{n-1} & v_2 & v_4 & \dots & v_n \\ v_1 & v_3 & & v_{n-1} & v_2 & v_4 & \dots & v_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1 & v_3 & \dots & v_{n-1} & \dots & v_4 & \dots & v_n \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

○ Richtig. ○ Falsch.

iii) Für $n \in \mathbb{N}$ gerade, gilt

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \dots & \dots & v_1 \\ v_3 & v_3 & \dots & \dots & v_3 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ v_{n-1} & v_{n-1} & \dots & \dots & v_{n-1} \\ v_2 & v_2 & \dots & \dots & v_2 \\ v_4 & v_4 & \dots & \dots & v_4 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ v_n & v_n & \dots & \dots & v_n \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

○ Richtig. ○ Falsch.

iv) $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \mathbf{x}$. ○ Richtig. ○ Falsch.

v) Sei $\mathbf{w} := [\mathbf{v}(1:2:n,1); \mathbf{v}(2:2:n,1)]$. Dann gilt $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbf{w}$.

○ Richtig. ○ Falsch.

vi) Es gibt ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, so dass für den Kern von $\mathsf{F}_{\mathbf{v}}$ gilt : $\mathrm{Kern}(\mathsf{F}_{\mathbf{v}}) = \{\mathbf{0}\}$.

○ Richtig. ○ Falsch.

vii) $\mathrm{Rang}(\mathsf{F}_{\mathbf{v}}) \leq 1$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. ○ Richtig. ○ Falsch.

2. (Polynomraum, Koeffizientenmatrix, Basiswechsel) (24P Total)

Es bezeichne $\mathbb{P}_n$, für $n \in \mathbb{N}_0$, den Vektorraum der Polynome (in der Variablen x) vom Grad kleiner gleich n:

$$\mathbb{P}_n := \left\{ \mathbf{p}(x) := \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \ : \ p_i \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathsf{T} : \begin{cases} \mathbb{P}_n & \to \ \mathbb{P}_n \\ \mathbf{p}(x) & \mapsto \ (\mathsf{T}\mathbf{p})(x) := \mathbf{p}(1-x) - \mathbf{p}(x) . \end{cases} \tag{1}$$

a) Was ist die Dimension von $\mathbb{P}_n$? (Eine Begründung wird nicht verlangt.) (2P)

2a)

b) Ist T eine lineare Abbildung? Bitte begründen Sie Ihre Antwort! (4P)

2b)

c) Wir betrachten nun den Fall $n = 3$. Geben Sie die Matrixdarstellung von T bezüglich der Monombasis $\mathcal{E} := \{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$ von $\mathbb{P}_3$ an. (6P)

2c)

d) Wir betrachten die Menge von Polynomen $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3, \mathbf{b}^4\} \subset \mathbb{P}_3$, mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}^1(x) &:= x^3\,, \\
\mathbf{b}^2(x) &:= 3x^2(1-x)\,, \\
\mathbf{b}^3(x) &:= 3x(1-x)^2\,, \\
\mathbf{b}^4(x) &:= (1-x)^3\,.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{P}_3$ ist. (6P)
Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz gemäss der Definition linearer Unabhängigkeit. Setzen Sie dann spezielle Werte für x ein.

2d)

e) Berechnen Sie die Matrixdarstellung von T bezüglich der in der vorhergehenden Teilaufgabe eingeführten Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{P}_3$. (6P)

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\mathsf{T}\mathbf{b}^i$ für alle $i \in \{1, \ldots, 4\}$.

2e)

3. (Rekursion, Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisieren) (26P Total)
Wir betrachten Zahlenfolgen, die durch folgende Vorschrift definiert sind,

$$x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}\,,\ n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{2}$$

wobei die "Startwerte" x_0 und $x_1 \in \mathbb{R}$ vorzugeben sind.

a) Für die Vorschrift (2) setzt man $\mathbf{z}_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Beschreiben Sie die lineare Abbildung

$$\mathsf{F}: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2\,, \\ \mathbf{z}_n & \mapsto \mathsf{F}(\mathbf{z}_n) = \mathbf{z}_{n+1}\,, \end{cases}$$

welche $\mathbf{z}_n$ auf $\mathbf{z}_{n+1}$ abbildet, indem Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2,2}$ von F (bezüglich der Kartesischen Basis des $\mathbb{R}^2$) angeben. (2P)

3a)

Hilfestellung: Falls Sie Teilaufgabe (3a) nicht gelöst haben, ersetzen Sie bitte die Rekursionsvorschrift (2) in den nachfolgenden Teilaufgaben durch diejenige, die zu der linearen Abbildung $\widetilde{\mathsf{F}}$ mit der Matrixdarstellung

$$\widetilde{\mathbf{F}} := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

führt. Rechnen Sie weiter mit dieser Matrix anstelle von $\mathbf{F}$.

b) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{F}$ aus Teilaufgabe (3a). (4P)

3b)

c) Berechnen Sie alle Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{F}$ aus Teilaufgabe (3a). (6P)

3c)

d) Diagonalisieren Sie die Matrix $\mathbf{F}$ aus Teilaufgabe (3a), das heisst, geben Sie eine Diagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{2,2}$ und eine reguläre Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{2,2}$ so an, dass

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S} = \mathbf{D}\ .\ \text{(6P)} \tag{3}$$

3d)

Hilfestellung: Falls Sie Teilaufgabe 3d) nicht gelöst haben, rechnen Sie bitte weiter mit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e) Wie sind die Startwerte x_0 und x_1 zu wählen, damit gilt

$$x_{99} = 1,\ x_{100} = 2 \text{ ? (8P)}$$

3e)

4. (QR-Zerlegung, Isometrie, Skalarprodukt, Orthonormalbasis) (22P Total)
Gegeben sei die folgende MATLAB-Funktion:

```
1  function m = midvec(v1, v2, v3)
2  % Input: v1, v2, v3: linear unabhaengige Spaltenvektoren
3  
4  v1 = v1/norm(v1);
5  v2 = v2/norm(v2);
6  v3 = v3/norm(v3);
7  
8  w12 = v2 - v1;
9  w23 = v3 - v2;
10 w31 = v1 - v3;
11 
12 [Q, R] = qr( [w12,w23,w31] );
13 
14 m = Q(:, 3);
```

Im folgenden bezeichne $\mathbf{w}^{ij} \in \mathbb{R}^n$, $i, j \in \{1,2,3\}$, die Vektoren `wij` aus dem MATLAB-Code, Zeile $8-10$, und $\mathbf{v}^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,2,3$, die Vektoren `vi`, die der MATLAB-Funktion als Argumente übergeben werden.

Achtung! Für die gesamte Aufgabe sei vorausgesetzt, dass $n \geq 3$ und dass die Vektoren $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$ und $\mathbf{v}^3$ linear unabhängig sind.

a) Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wann ist eine lineare Abbildung $\mathsf{L} : V \to V$ eine Isometrie? (2P)

4a)

b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{w}^{12}$ und $\mathbf{w}^{23}$ linear unabhängig sind. (5P)

4b)

c) Es seien beliebige $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, vorgegeben. Beweisen Sie, dass gilt

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\},\ \mathbf{x}^\top \mathbf{w}^{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \measuredangle(\mathbf{x},\, \mathbf{v}^i) = \measuredangle(\mathbf{x},\, \mathbf{v}^j)\,.$$

In Worten, wenn ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ so gegeben ist, dass $\mathbf{x}^\top \mathbf{w}^{ij} = 0$ erfüllt ist, dann ist der von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}^i$ gebildete Winkel gleich dem Winkel der von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}^j$ gebildet wird. (5P)

4c)

d) Es stehe $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ für die in Zeile 12 des obigen MATLAB-Codes durch Aufruf der MATLAB-Funktion `qr` berechnete Matrix. Zeigen Sie, dass die ersten beiden Spalten von $\mathbf{Q}$ den gleichen Raum aufspannen wie $\mathbf{w}^{12}$ und $\mathbf{w}^{23}$. (5P)

Hinweis:

- Erinnern Sie sich daran, was

```
[Q, R] = qr(A);
```

  bedeutet: Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$, mit $n \geq m$, werden zwei Matrizen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n,m}$ berechnet, so dass
  - $\mathbf{QR} = \mathbf{A}$,
  - $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist eine *orthogonale Matrix*,
  - $\mathbf{R}$ ist eine *obere Dreiecksmatrix*.
- Drücken Sie die Matrix $\mathbf{Q}$ anhand ihrer Spaltenvektoren

$$\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^n \in \mathbb{R}^n$$

  aus und berechnen Sie damit die ersten beiden Spalten des Produktes $\mathbf{QR}$, um damit die Behauptung zu beweisen.

4d)

e) Sei $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ der Ausgabevektor `m` der oben angegebenen MATLAB-Funktion. Zeigen Sie, dass $\mathbf{m}$ mit allen Vektoren $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$, $\mathbf{v}^3$, den gleichen Winkel einschliesst, das heisst

$$\measuredangle(\mathbf{m},\, \mathbf{v}^1) = \measuredangle(\mathbf{m},\, \mathbf{v}^2) = \measuredangle(\mathbf{m},\, \mathbf{v}^3)\,. \text{ (5P)}$$

Hinweis: Die Aussage kann durch Kombination der Aussagen vorhergehender Teilaufgaben bewiesen werden.

4e)