Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Winter 2010

Prof. D. Stoffer

Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.

1. a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem als Tableau und führen Sie einen Eliminationsschritt des Gaussverfahrens aus, wobei Sie das Pivot in der ersten Zeile wählen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & 5z & = & -1 \\ 6x & + & 10y & - & 9z & = & 5 \\ -4x & & & + & 4z & = & 3 \end{array}$$

   b) Das Gaussverfahren, angewandt auf ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten, das zwei Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ enthält, liefert das folgende Endschema:

$$\begin{array}{|ccc|c|} 2 & 2-a & -2a & b \\ 0 & a-2 & a & a-1 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}$$

   Bestimmen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge.

2. Gegeben sind die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \; , \quad v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \; , \quad w = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sowie die Matrix $A = (u\ v\ w)$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Ihre Antworten sind nicht zu begründen.)

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort -1. Die Gesamtpunktzahl wird aber nicht negativ.

a) Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau eine Lösung.

b) Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nichttriviale Lösungen.

c) Die Vektoren u, v, w sind erzeugend.

d) Die Vektoren u, v, w sind linear abhängig.

e) Es gilt $\det(A) = 0$.

f) Der Vektor $(3, 6, -2)^T$ ist Eigenvektor der Matrix A.

g) 7 ist Eigenwert der Matrix A.

h) Die Matrix A ist symmetrisch.

3. Unter der linearen Abbildung $\mathcal{F}$ werden die drei Punkte

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf die unten dargestellten Punkte B_1, B_2, B_3 abgebildet. Sei α die Ebene, die die Punkte E_1, E_2, E_3 und B_1, B_2, B_3 enthält.

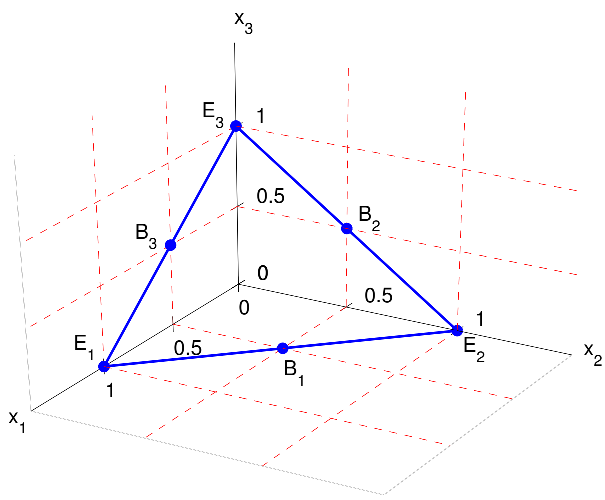
a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A der Abbildung $\mathcal{F}$.

b) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von $\mathcal{F}$ (d.h. alle Punkte x, für welche $\mathcal{F}(x) = x$ gilt).

c) Sei α_0 die Ebene, welche parallel zur Ebene α durch den Nullpunkt geht. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix P der Projektion auf die Ebene α_0.

d) Sei $z_0 = E_1$, und sei die Folge $(z_k), k \geq 0$ rekursiv durch $z_{k+1} = \mathcal{F}(z_k)$ definiert. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{k\to\infty} z_k$. Eine geometrische Begründung genügt.

Hinweis: Beachten Sie, dass alle Punkte z_k in der Ebene α liegen.



4. Für verschiedene Werte von x wird die Grösse

$$K(x) = \left(\frac{a}{2} + b\right)x^2 - \left(\frac{a}{2} + 2b\right)x + a - b$$

gemessen:

x_i	-1	0	1	2
K_i	5	1	0	2

Bestimmen Sie die Parameter a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate.

5. Gegeben ist das System von linearen Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b \tag{1}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen von (1) (d.h. Lösungen mit $\dot{x}(t) = 0$).

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

c) Bestimmen Sie die Lösung mit der Anfangsbedingung $x(0) = \begin{pmatrix} -3\sqrt{3} \\ 9 \end{pmatrix}$.

6. a) Bestimmen Sie eine Approximation $\hat{I}(h)$ des Integrals

$$I = \int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe der summierten Simpsonregel für die Schrittweiten $h = 2$ und $h = 1$.

b) Der Fehler der Simpsonregel hat folgende Entwicklung

$$\hat{I}(h) - I = c_4 h^4 + c_5 h^5 + O(h^6).$$

Bestimmen Sie durch Extrapolation eine verbesserte Approximation.

Hinweis: Im Gleichungssystem

$$I(h) = I + c_4 h^4 + c_5 h^5 + O(h^6) \quad \text{für } h = 2, 1$$

die Variable c_4 eliminieren.

c) Bestimmen Sie den relativen Fehler Ihrer drei Approximationen. Exakter Wert: $I = \ln(3)$.

Viel Erfolg!