Prüfung

Lineare Algebra und Numerische Mathematik
D-BAUG

Winter 2013

Prof. H.-R. Künsch

Alle Aufgaben haben das gleiche Gewicht.
Die Lösungswege müssen, abgesehen von Aufgabe 1, nachvollziehbar dargestellt sein.

Regeln Multiple Choice:

- *Kreuzen Sie an, welche der Aussagen in (a) - (d) richtig sind.*
- *Es muss keine Begründung gegeben werden. Bemerkungen und Rechnungen auf dem Blatt haben keinen Einfluss auf die Punkte.*
- *Es können mehrere Antworten pro Teilaufgabe richtig sein.*
- *Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, jedes falsche Kreuz gibt einen Punkt Abzug. Falls eine negative Gesamtpunktzahl für Aufgabe 1 erreicht wird, werden null Punkte vergeben.*

1. *(Multiple Choice)*
Gegeben sei die folgende Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) $\det(\mathbf{A}) = 0$ genau dann wenn gilt

- ○ $a = 1$.
- ○ $a = 0$.
- ○ $\mathbf{A}$ singulär.
- ○ $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.
- ○ $\det(\mathbf{A})$ wird nie Null.
- ○ $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(b) Es gilt:

- ○ Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ ist
$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(a+1)\lambda + \frac{1}{2}(a-1).$$
- ○ Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ ist
$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(a+1)\lambda + \frac{1}{2}(a-1).$$
- ○ Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind reell für alle $a \in \mathbb{R}$.
- ○ Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{A}$ nicht diagonalisierbar ist.

(c) Für $a = -1$ gilt:

- ○ $\mathbf{A}$ ist eine orthogonale Matrix.
- ○ $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.
- ○ $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.
- ○ $\|\mathbf{A}\| = 1$.

(d) Die **LR**-Zerlegung von $\mathbf{A}$ ist

- ○ $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$.
- ○ $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$.

2. Gegeben sei die lineare Abbildung $\mathcal{F}: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{F}: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 & & + & 6x_3 & - & 10x_4 & + & x_5 \\ & 3x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 \end{pmatrix}$$

(a) Stellen Sie die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ in Matrixform dar:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}\,,$$

d.h. geben Sie $\mathbf{A}$ an.

(b) Geben Sie Vektoren an, welche Bild($\mathbf{A}$) aufspannen. Ist $\mathcal{F}$ surjektiv?

(c) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

in Kern($\mathbf{A}$) liegen.

(d) Ergänzen Sie $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ zu einer Basis von Kern($\mathbf{A}$).

3. Zwei radioaktive Stoffe mit Halbwertszeiten $\lambda_1 = 1$ respektive $\lambda_2 = 2$ werden in einem Stoffgemisch festgestellt. Wir wollen nun wissen, in welchem Verhältnis die beiden Stoffe zum Zeitpunkt $t = 0$ gemischt sind.
Dazu messen wir zu verschiedenen Zeitpunkten t_i die Intensität $I(t_i)$ der Strahlung des Gemisches. Aus den obigen Angaben folgt, dass sich die Intensität als Funktion der Zeit folgendermassen verhält:

$$I(t) = x_1 2^{-t/\lambda_1} + x_2 2^{-t/\lambda_2}\,, \tag{1}$$

wobei wir die Halbwertszeiten $\lambda_1 = 1$ respektive $\lambda_2 = 2$ der beiden Stoffe kennen. x_1 und x_2 sind die unbekannten Mengen der beiden Stoffe zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Messungen ergeben folgende Werte:

t_i	0	1	2
$I(t_i)$	4	2	$\frac{1}{2}$

(2)

(a) Bestimmen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, welches aus den obigen Bedingungen (1) und (2) resultiert.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem im Sinne der kleinsten Quadrate.

(c) Nehmen Sie an, dass die Stoffmengen x_1, x_2, welche Sie in (b) erhalten haben, die wahren Werte sind. Wie gross sind dann die relativen Fehler der gemessenen Intensitäten in (2)?

4. Gegeben sei folgendes lineares Gleichungssystem abhängig vom reellen Parameter α:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 1\,x_1 & + & \frac{2}{5}\,x_2 & - & \frac{2}{5}\,x_3 & - & 6x_4 & = & 0 \\ 5\,x_1 & + & 2\,x_2 & - & 7\,x_3 & & & = & 1 \\ \frac{5}{2}\,x_1 & & & - & \frac{3}{2}\,x_3 & - & 2\,x_4 & = & \alpha \\ & & 2\,x_2 & - & 4\,x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

(a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem als Tableau (Schema) für die **LR**-Zerlegung und berechnen Sie den ersten Schritt der **LR**-Zerlegung mit Spaltenmaximumsstrategie. Vergessen Sie nicht, zusätzlich zum veränderten Schema die Matrix $\mathbf{L}_1$ und die Permutationsmatrix $\mathbf{P}_1$ für den ersten Schritt anzugeben.

(b) Gegeben seien folgende Enddaten für die **LR**-Zerlegung mit Spaltenmaximumsstrategie von (3):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von α besitzt das Gleichungssystem (3) genau eine, unendlich viele bzw. keine Lösung?
Bestimmen Sie die Lösungsmenge zu denjenigen α, für die das Gleichungssystem lösbar ist.

5. Gegeben sei folgendes lineares Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= x_3\\ \dot{x}_3 &= -4x_1 + 4x_2 + x_3.\end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie das Differentialgleichungssystem in der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.

(c) Bestimmen Sie eine Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ mit der Eigenschaft, dass die Lösung des Systems für $t \to \infty$ gegen $\mathbf{0}$ konvergiert:

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0\,.$$

6. Wir betrachten zwei Spaltenvektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ ungleich $\mathbf{0}$ im $\mathbb{R}^n$, deren Skalarprodukt $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u}^T\mathbf{v}$ nicht gleich -1 ist.

   (a) Berechnen Sie die Matrizen $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ und $\left(\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^2$ für den Fall

   $$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

   und bestimmen Sie deren Rang.

   (b) Wie viele Zeilen und Spalten hat die Matrix $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ allgemein? Zeigen Sie, dass gilt

   $$\left(\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^2 = c\mathbf{u}\mathbf{v}^T \text{ für ein } c \in \mathbb{R}.$$

   Bestimmen Sie c.

   (c) Zeigen Sie, dass gilt

   $$\left(\mathbf{I}_n + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1} = \mathbf{I}_n - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{u}}.$$