P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Serie 3

Aufgabe 3.1 Rang eines linearen Gleichungssystems

Bestimmen Sie – in Abhängigkeit vom Paramter $a \in \mathbb{R}$ – den Rang des folgenden Gleichungssystems mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & (a^2+3a)x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 3.2 Lineares Gleichungssystem: Flussnetzwerk

Flussnetzwerke sind Netzwerke von Rohren und Knoten, durch die Flüsse fliessen. In dieser Aufgabe betrachten wir das Flussnetzwerk in Abbildung 3.1, das ein System von Wasserleitungen beschreibt. Kanten entsprechen dabei Rohren, während Knoten durch die nummerierten Punkte abgebildet sind.

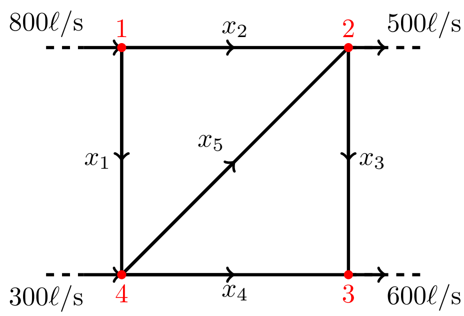

Abbildung 3.1: Schema des Flussnetzwerks

Eine Gleichgewichtsbedingung an allen Knoten führt bei Flussnetzwerken auf ein lineares Gleichungssystem, das eine Beziehung zwischen allen Rohrflüssen herstellt. Diese Gleichgewichtsbedinung besagt, dass an jedem Knoten gleich viel Wasser zufliesst, wie abfliesst, und wird oft “Knotenregel” genannt. Wenn die $x_1, x_2, \dots, x_5$ die Rohrflüsse durch die verschiedenen Kanten in Litern pro Sekunde angeben, besagt die Knotenregel also zum Beispiel beim Knoten 1, dass $x_1 + x_2 = 800$ gelten muss. Beachten Sie, dass Flüsse nur in die durch Pfeile angegebenen Richtungen fliessen können, da Rückschlagventile in die Rohre eingebaut sind (was bedeutet das für die Variablen $x_1, x_2, \dots, x_5$?).

3.2a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für die Flüsse $x_1, x_2, \ldots, x_5$ auf, welches sich aus Abbildung 3.1 unter Berücksichtigung der Knotenregel ergibt.

3.2b) Geben Sie die Lösungsmenge des lineare Gleichungssystems aus Teilaufgabe 3.2a) mit Hilfe der Gausselimination an (d.h. durch Transformation auf Zeilenstufenform).

3.2c) Beschreiben Sie nun die möglichen Lösungen für die Rohrflüsse unter Berücksichtigung der Fliessrichtungen wie in Abbildung 3.1 angegeben.

Tipp: Aus Teilaufgabe 3.2b) haben Sie eine parametrisierte Darstellung der Lösungsmenge erhalten, für die Sie nun die Parameterbereiche geeignet einschränken müssen.

3.2d) Was ist der maximale Fluss in $4 \to 2$, wenn Sie annehmen, dass das Rohr $2 \to 3$ blockiert ist, also $x_3 = 0$?

3.2e) Eine Messung hat ergeben, dass durch das Rohr $2 \to 3$ doppelt soviel Wasser pro Zeiteinheit fliesst wie durch das Rohr $4 \to 3$. Wir wissen also, dass gilt

$$x_3 = 2x_4\,. \tag{3.2.1}$$

Bestimmen Sie den maximalen Fluss x_5 durch das Rohr $4 \to 2$.

Aufgabe 3.3 Welche Matrixprodukte sind definiert?

In der Vorlesung haben Sie die Multiplikation von Matrizen kennengelernt und insbesondere die Bedingungen, unter welchen diese definiert ist. Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie jeweils die zutreffende Aussage an.

3.3a) $\mathbf{AB}$ ist

(i) nicht definiert.

(ii) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

(iii) $= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

3.3b) $\mathbf{BA}$ ist

(iv) nicht definiert.

(v) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

(vi) $= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

3.3c) $\mathbf{B}\mathbf{B}$ ist

(vii) nicht definiert.

(viii) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 16 & 0 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

(ix) $= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 16 & 0 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

3.3d) $\mathbf{A}\mathbf{A}$ ist

(x) nicht definiert.

(xi) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

(xii) $= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3.3e) $\mathbf{B}^\top\mathbf{B}$ ist

(xiii) nicht definiert.

(xiv) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

(xv) $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

3.3f) $\mathbf{B}\mathbf{B}^\top$ ist

(xvi) nicht definiert.

(xvii) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

(xviii) $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.4 Kommutierende Matrizen

Sie haben in der Vorlesung gesehen, dass die Matrixmultiplikation von zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ im allgemeinen nicht kommutativ ist, dass heisst, die Beziehung $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ gilt nicht. In dieser Aufgabe studieren wir aber Beispiele von Matrizen, deren Matrixprodukt kommutiert, da sie in einer besonderen Beziehung stehen.

Gegeben sind zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{C}\mathbf{D}_1\mathbf{C}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{C}\mathbf{D}_2\mathbf{C}, \end{aligned} \qquad \text{wobei } \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \in \mathbb{R}^{n,n} \textit{ diagonal} \text{ sind}$$

und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n,n}$ die Beziehung $\mathbf{C}^2 = \mathbf{I}_n$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Aufgabe 3.5 Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix

Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

3.5a) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{A}$ regulär?

Tipp: Überlegen Sie sich, wieso eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ genau dann regulär ist, wenn das Gleichungssystem $\mathbf{Mx} = 0$ *nur* die triviale Lösung $\mathbf{x} = 0$ hat, und verwenden Sie diese Tatsache.

3.5b) Bestimmen Sie für die in a) ermittelten Werte von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$.

Veröffentlichung am 06. Oktober 2015.

Abzugeben bis 14. Oktober 2015.