Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Prof. R. Hiptmair

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Draft version 1. August 2015,

URL: http://www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/tmp/LANM/LANM14.pdf

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Gleichungssysteme **6**

1.1 Lineare Gleichungen 6

1.1.1 Definition und Notation 6

1.1.2 Lösungen linearer Gleichungen 7

1.1.3 Visualisierung von Lösungsmengen linearer Gleichungen 11

1.2 Lineare Gleichungssysteme: Einführung 13

1.2.1 Definition und Lösungsmengen 13

1.2.2 Matrixnotation 15

1.3 Gausselimination 22

1.3.1 Zeilenumformungen 22

1.3.2 Zeilenstufenform 26

1.3.3 Gausselimination: Algorithmus 28

1.3.4 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme 32

2 Rechnen mit Vektoren und Matrizen **38**

2.1 Vektorrechnung im n-dimensionalen Raum . . . 38

2.2 Linearkombinationen und Matrix-Vektor-Produkt . . . 40

2.3 Matrixprodukt . . . 45

2.4 Matrixkalkül . . . 53

2.5 Inverse Matrix . . . 55

2.6 Transponierte Matrix . . . 58

2.7 Blockmatrixoperationen . . . 61

3 Unterräume und Basen **69**

3.1 Erzeugnisse und Unterräume . . . 70

3.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension . . . 74

3.3 Bild und Kern von Matrizen, Dimensionssatz . . . 78

3.4 Koeffizientenvektoren und Basiswechsel . . . 84

4 Der Euklidische Raum **88**

4.1 Das Euklidische Skalarprodukt . . . 88

4.1.1 Definition und Eigenschaften . . . 88

4.1.2 Länge von Vektoren im n dimensionalen Raum . . . 91

4.1.3 Winkel . . . 92

4.2 Abstand . . . 96

4.2.1 Abstandsbegriff . . . 96

4.2.2 Ergänzung: Quadratische Formen 97
4.2.3 Orthogonale Projektion 100
4.3 Orthogonalität 102
4.3.1 Orthogonale Vektoren 102
4.3.2 Orthogonale Komplemente 103
4.3.3 Orthogonale Matrizen 104
4.3.4 Orthogonalisierung 106
4.3.5 Vektorprodukt 110
4.4 Lineare Ausgleichsrechnung 113
4.4.1 Überbestimmte lineare Gleichungssysteme: Beispiele 113
4.4.2 Kleinste-Quadrate Lösung 114
4.4.3 Normalengleichungen 115
4.4.4 Orthogonalisierungstechniken 117
4.5 Volumenformen und Determinanten 119
4.5.1 Volumen 119
4.5.2 Determinanten 123
4.5.3 Determinantenformeln 125
4.5.4 Determinante und Matrixprodukt 129

5 Lineare Abbildungen **136**

5.1 Wiederholung: Vektoren und Koordinaten . . . 138
5.2 Konzept der linearen Abbildung . . . 141
5.3 Matrixdarstellung . . . 152
5.3.1 Definition . . . 152
5.3.2 Matrixdarstellung bei Basiswechsel . . . 156
5.4 Lineare Selbstabbildungen . . . 158
5.5 Projektionen . . . 160
5.6 Isometrien im Euklidischen Raum . . . 165
5.6.1 Lägenerhaltung . . . 165
5.6.2 Spiegelungen . . . 167
5.6.3 Drehungen . . . 169
5.6.3.1 Drehungen im $\mathbb{R}^2$ . . . 169
5.6.3.2 Drehungen im $\mathbb{R}^3$ . . . 171

6 Diagonalisierung **174**

6.1 Motivation: Lineare Rekursionen . . . 174
6.2 Matrixdiagonalisierung . . . 185
6.2.1 Anwendung: Geschlossene Darstellung linearer Rekursionen . . . 186
6.2.2 Anwendung: Matrixfunktionen . . . 188
6.3 Rechnen im n-dimensionalen complexen Raum . . . 191
6.4 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 195
6.5 Diagonalisierbarkeit . . . 199
6.5.1 Allgemeine Kriterien . . . 199
6.5.2 Diagonalisierbarkeit normaler Matrizen . . . 201

Index **207**

Begriffe . . . 207

Beispiele . . . 207

Definitionen . . . 207

MATLAB-Programme . . . 207

Symbole und Bezeichnungen . . . 207

- MATLAB-Codes sind verfügbar unter: http://www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/tmp/LANM/MATLAB/

- WIKI zur Vorlesung: lanmdbaug.wikispaces.com

Bitte melden Sie Fehler in den Vorlesungsunterlagen via dieser Wikiseite.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

1 Lineare Gleichungssysteme

1.1 Lineare Gleichungen

1.1.1 Definition und Notation

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition I.1.1.A (Lineare Gleichung)**.**
Gegeben seien eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$*, reelle Zahlen* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *und* $b \in \mathbb{R}$*.*
Dann heisst

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b \tag{I.1.1.B}$$

eine lineare Gleichung in den Unbekannten x_j*,* $j = 1, \ldots, n$*, mit Koeffizienten* a_j*,* $j = 1, \ldots, n$*, und rechter Seite* b*.*

Notation: $\mathrm{LG}(a_1, \dots, a_n; b) \hat{=}$ lineare Gleichung mit Koeffizienten a_j, $j = 1, \dots, n$ und rechter Seite b

1.1.2 Lösungen linearer Gleichungen

Definition I.1.2.C (Lösung(smenge) einer linearen GLeichung)**.**
Eine endliche Folge $x_1, \dots, x_n$ von $n \in \mathbb{N}$ reellen Zahlen heisst Lösung der linearen Gleichung $\mathrm{LG}(a_1, \dots, a_n; b)$, wenn sie (I.1.1.B) *erfüllt (nach "Einsetzen").*
Für die Menge der Lösungen einer linearen Gleichung $\mathrm{LG}(a_1, \dots, a_n; b)$ schreiben wir $\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_1, \dots, a_n; b))$.

Wir schreiben die Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ in eckigen Klammern übereinander ➢ Spaltenvektor

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Die x_j, $j \in \{1, \dots, n\}$ heissen Komponenten des Spaltenvektors $\mathbf{x}$, n seine Länge.

✎ Notation: Spaltenvektoren bezeichnen wir mit kleinen fettgedruckten/unterstrichenen Buchstaben: $\mathbf{x}, vy, \mathbf{z}, \mathbf{a}, \ldots$.

✎ Notation: $\mathbb{R}^n \mathrel{\hat{=}}$ Menge der Spaltenvektoren der Länge $n \in \mathbb{N}$.

✎ Notation: Summenzeichen, z.B.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\sum_{\substack{j=m\\ j\neq i}}^{n} x_j := x_m + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n$$

(für $m \leqslant i \leqslant n$)

Satz I.1.2.D (Beschreibung der Lösungsmenge linearer Gleichungen)**.**
Für eine gegebene lineare Gleichung $\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, *gilt:*

1. *Gibt es ein* a_j, $j = 1, \ldots, n$, *mit* $a_j \neq 0$ *dann ist die Lösungsmenge*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b)) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{j-1} \\ \frac{b}{a_j} - \sum\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^{n} \frac{a_\ell}{a_j}\alpha_\ell \\ \alpha_{j+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{array}{c} \alpha_1 \in \mathbb{R}, \\ \vdots \\ \alpha_{j-1} \in \mathbb{R}, \\ \alpha_{j+1} \in \mathbb{R}, \\ \vdots \\ \alpha_n \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \tag{I.1.2.E}$$

2. *Gilt für alle* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *dass* $a_j = 0$, *dann besitzt* $\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b)$ *die Lösungsmenge*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LG}(0, \ldots, 0; b)) = \begin{cases} \emptyset & \text{, falls } b \neq 0 \ , \\ \mathbb{R}^n & \text{, falls } b = 0 \ . \end{cases}$$

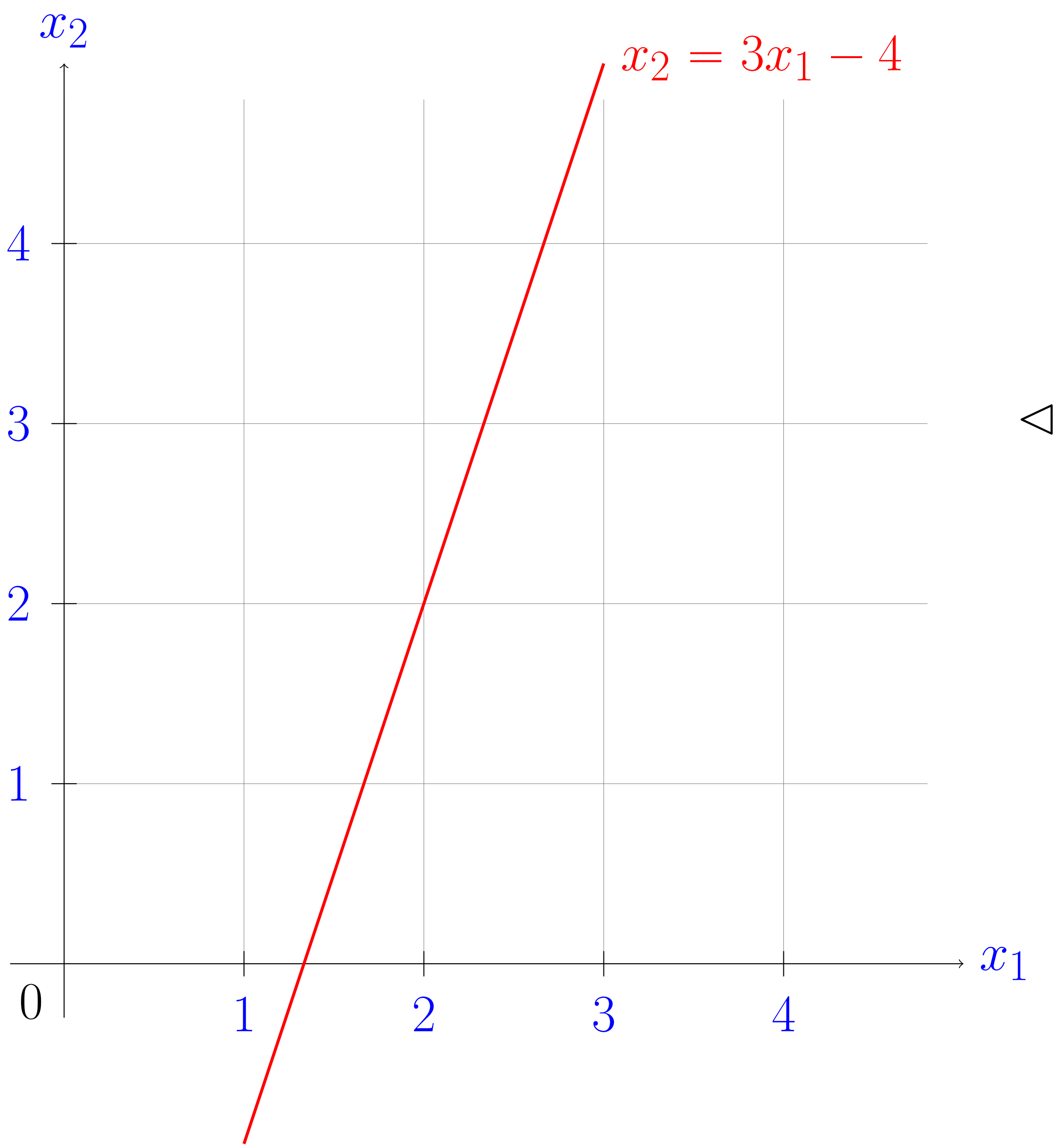
R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Korollar I.1.2.F (Invarianzeigenschaft der Lösungsmenge einer linearen Gleichung)**.**
Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$*, beliebige* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$*,* $b \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_1, \dots, a_n; b)) = \mathcal{L}(\mathrm{LG}(\lambda a_1, \dots, \lambda a_n; \lambda b))$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.1.3 Visualisierung von Lösungsmengen linearer Gleichungen



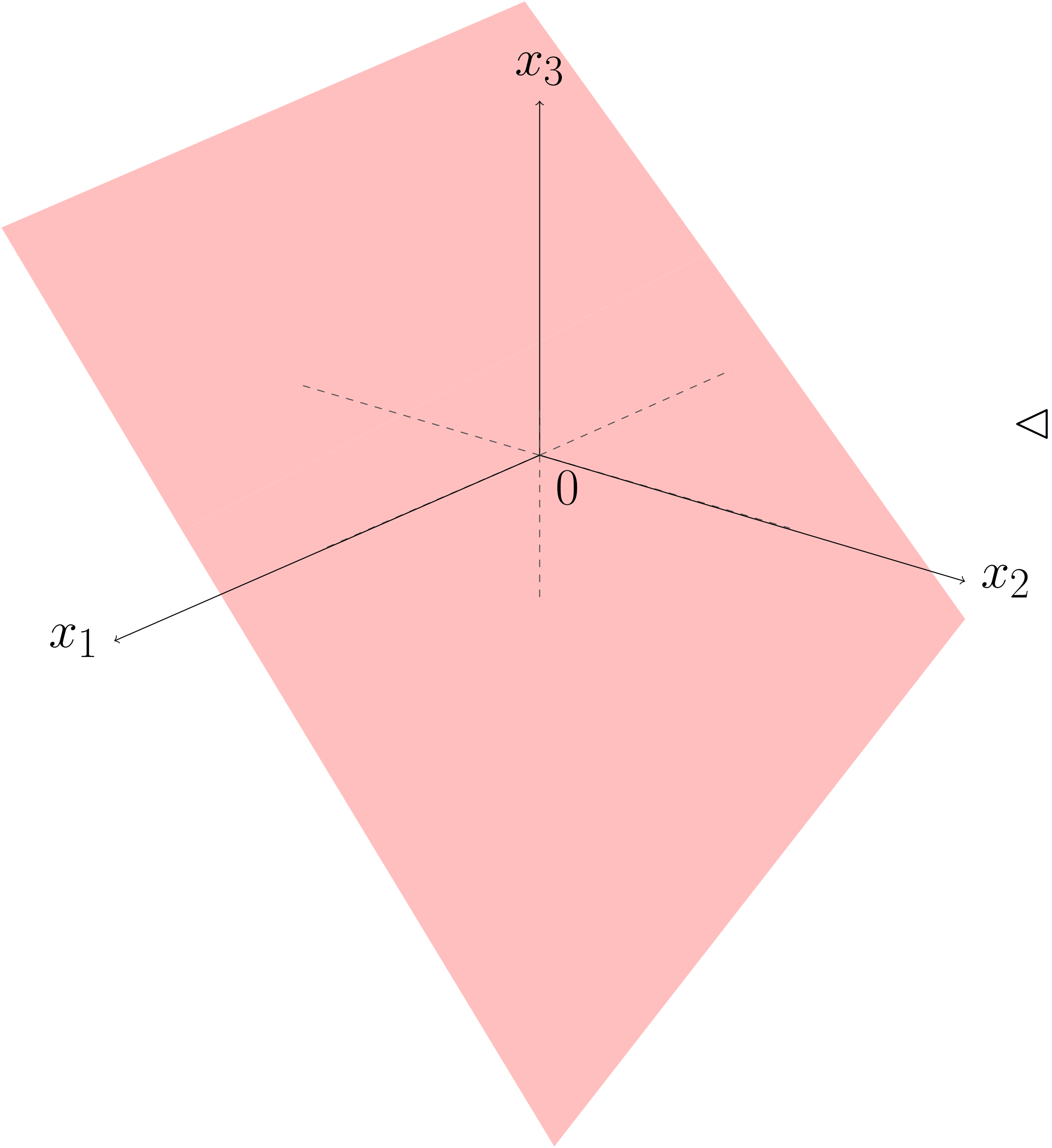
$\triangleleft$ Lösungsmemge der Gleichung

$$3x_1 - x_2 = 4$$

im Kartesischem Koordinatensystem.

= eine Gerade

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



◁ Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0$$

im 3D Kartesischen Koordinatensystem

= eine Ebene

1.2 Lineare Gleichungssysteme: Einführung

1.2.1 Definition und Lösungsmengen

Definition I.2.1.A (Lineares Gleichungssystem)**.**
Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m \cdot n$ *reelle Zahlen* $a_{i,j}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *und* m *reelle Zahlen* b_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$.
Dann heissen die m *linearen Gleichungen*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \tag{I.2.1.B}$$

ein ***lineares Gleichungssystem*** *(LGS) von* m *Gleichungen in den* n *Unbekannten* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *mit den* ***Koeffizienten*** $a_{i,j}$ *und* ***rechter Seite*** $b_1, \ldots, b_m$.
Die lineare Gleichung $\mathrm{LG}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}; b_i)$ *heisst die* i*-te* ***Zeile*** *des linearen Gleichungssystems,* $i \in \{1, \ldots, m\}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition I.2.1.D (Lösung(smenge) eines linearen Gleichungssystems).
Eine endliche Folge $x_1, \ldots, x_n$ *von* n *reellen Zahlen heisst* *Lösung* *eines linearen Gleichungssystems wie definiert in Definition I.2.1.A, wenn sie* alle *linearen Gleichungen in Gleichung I.2.1.B erfüllt.*

Korollar I.2.1.F (Charakterisierung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems).
Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems wie in Definition I.2.1.A ist

$$\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}; b_1)) \cap \mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}; b_2)) \cap \cdots \cap \mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_{m,1}, \ldots, a_{m,n}; b_m)) .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

1.2.2 Matrixnotation

Definition I.2.2.F (Matrix)**.**
Für gegebene natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ verstehen wir unter einer $m \times n$-Matrix ein rechteckiges Schema von $m \cdot n$ reellen Zahlen, angeordnet in m Zeilen und n Spalten.
Die $m \cdot n$ Zahlen einer Matrix werden Elemente oder Einträge der Matrix genannt und durch zwei Indices referenziert.

✎ Notation: grosse Buchstaben im Fettdruck für Matrizen:

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} .$$

✎ Notation: Eintrag der Matrix $\mathbf{A}$ in Zeile i und Spalte j: $(\mathbf{A})_{i,j}$, also

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A})_{1,1} & (\mathbf{A})_{1,2} & \dots & (\mathbf{A})_{1,n} \\ (\mathbf{A})_{2,1} & (\mathbf{A})_{2,2} & \dots & (\mathbf{A})_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A})_{m,1} & (\mathbf{A})_{m,2} & \dots & (\mathbf{A})_{m,n} \end{bmatrix} .$$

✎ Notation: Menge der $m \times n$-Matrizen: $\mathbb{R}^{m,n}$.

✎ Notation: Nullmatrix

$$\mathbf{O} = \mathbf{O}_{m,n} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} \; .$$

Spezialfälle:

Definition I.2.2.H (Spalten- und Zeilenvektoren)**.**
Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times 1$-Matrix heisst Spaltenvektor der Länge m und eine $1 \times n$-Matrix heisst Zeilenvektor der Länge n.
Im Fall von Spalten- und Zeilenvektoren bezeichnet man die Einträge auch als Komponenten.

✎ Notation: fette Kleinbuchstaben für *Spaltenvektoren*, z.B.

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Referenzierung der i. Komponente des Spaltenvektors $\mathbf{x}$: $(\mathbf{x})_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$.

✎ Notation: Menge der Spaltenvektoren der Länge m: $\mathbb{R}^n$

✎ Notation: fette Kleinbuchstaben mit hochgestelltem $\top$ für *Zeilenvektoren*

$$\mathbf{z}^\top := \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{bmatrix} .$$

Referenzierung der i. Komponente des Zeilenvektors $\mathbf{z}$: $(\mathbf{z}^\top)_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Teilmatrizen von

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} (\mathbf{A})_{1,1} & (\mathbf{A})_{1,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{1,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{1,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{1,n} \\ (\mathbf{A})_{2,1} & (\mathbf{A})_{2,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{2,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{2,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A})_{k,1} & (\mathbf{A})_{k,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{k,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{k,j} & \cdots & (\mathbf{A})_{k,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A})_{i,1} & (\mathbf{A})_{i,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{i,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{i,j} & \cdots & (\mathbf{A})_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A})_{m,1} & (\mathbf{A})_{m,2} & \cdots & (\mathbf{A})_{m,\ell} & \cdots & (\mathbf{A})_{m,j} & \cdots & (\mathbf{A})_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} .$$

➊ Für $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$,

i. Zeile: $(\mathbf{A})_{i,:} := \left[(\mathbf{A})_{i,1} \;\; (\mathbf{A})_{i,2} \;\; \ldots \;\; (\mathbf{A})_{i,n}\right] \in \mathbb{R}^{1,n}$ (ein Zeilenvektor, Länge m)

j. Spalte: $(\mathbf{A})_{:,j} := \begin{bmatrix} (\mathbf{A})_{1,j} \\ (\mathbf{A})_{2,j} \\ \vdots \\ (\mathbf{A})_{m,j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m}$ (ein Spaltenvektor, Länge n)

✎ Notation: Bereich ganzer Zahlen:
für $i, j \in \mathbb{Z}$: $i : j = (i, i+1, i+2, \ldots, j)$ (leer, wenn $j < i$)

❷ Für $k, i \in \{1, \dots, m\}$, $k \leqslant i$, $\ell, j \in \{1, \dots, n\}$, $\ell \leqslant j$:

$$(\mathbf{A})_{k:i,\ell:j} := \begin{bmatrix} (\mathbf{A})_{k,\ell} & (\mathbf{A})_{k,\ell+1} & \dots & (\mathbf{A})_{k,j} \\ (\mathbf{A})_{k+1,\ell} & (\mathbf{A})_{k,\ell+1} & \dots & (\mathbf{A})_{k+1,j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A})_{i,\ell} & (\mathbf{A})_{i,\ell+1} & \dots & (\mathbf{A})_{i,j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{i-k+1,j-\ell+1} \quad \text{(Matrixblock)} .$$

Spezielle Matrizen:

Definition I.2.2.J (Diagonalmatrix)**.**
Eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, heisst Diagonalmatrix, wenn $(\mathbf{D})_{i,j} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n$ mit $i \neq j$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Terminologie: Die Zahlen $(\mathbf{D})_{i,i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, heissen Diagonaleinträge.

✎ Notation: Für gegebene Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$/gegebenen Spaltenvektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) := \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n} ,$$

$$\operatorname{diag}(\mathbf{d}) := \begin{bmatrix} (\mathbf{d})_1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & (\mathbf{d})_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & & \dots\ 0 & (\mathbf{d})_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n} .$$

Matrixnotation für lineare Gleichungssysteme: für das LGS

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \tag{I.2.1.B}$$

mit m Gleichungen und n Unbekannten schreibt man auch

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} , \tag{I.2.2.L}$$

mit der $m \times n$-Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} ,$$

dem Lösungs(spalten-)vektor (der Länge n)

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n ,$$

und dem Rechte-Seite-(Spalten-)Vektor (der Länge m)

$$\mathbf{b} := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m .$$

✎ Notation: $\mathrm{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{b})$ = lineares Gleichungssystem (→ Unterabschnitt 1.2.2) mit Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$, rechte-Seite-Vektor $\mathbf{b}$.

✎ Notation: Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit $m \times n$-Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und rechte-Seite-Vektor $\mathbf{b}$, siehe Korollar I.2.1.F,

$$\mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{b})) := \bigcap_{j=1}^{m} \mathcal{L}(\mathrm{LG}((\mathbf{A})_{j,:};b_j)) .$$

1.3 Gausselimination

1.3.1 Zeilenumformungen

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem (I.2.1.B), in Matrixnotation $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, siehg (I.2.2.L).

Definition I.3.1.A (Zeilenumformungen eines LGS)**.**
Bezogen auf das lineare Gleichungssystem (I.2.1.B) *schreiben wir*

$$\text{Zeile}\, j \quad \leftarrow \quad \text{Zeile}\, j + \beta \cdot \text{Zeile}\, i \ , \tag{I.3.1.C}$$

für ein $\beta \in \mathbb{R}$*, wenn die* j*. Zeile,* $j \in \{1, \ldots, m\}$*,*

$$a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j \ ,$$

ersetzt *wird durch eine "Summe aus der* j*. Zeile und dem* β*-fachen der* i*. Zeile",* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *(Zeilenkombination):*

$$(a_{j,1} + \beta a_{i,1})x_1 + (a_{j,2} + \beta a_{i,2})x_2 + \cdots + (a_{j,n} + \beta a_{i,n})x_n = b_j + \beta b_i \ .$$

Wir schreiben für $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $j \in \{1, \ldots, m\}$*,*

$$\text{Zeile}\, j \quad \leftarrow \quad \alpha \cdot \text{Zeile}\, j \ , \tag{I.3.1.E}$$

wenn die j*. Zeile* ersetzt wird durch *das "*α*-fache der* j*. Zeile" (Zeilenskalierung):*

$$\alpha a_{j,1}x_1 + \alpha a_{j,2}x_2 + \cdots + \alpha a_{j,n}x_n = \alpha b_j \ .$$

Diese Transformationen eines linearen Gleichungssystems nennt man Zeilenumformungen.

✎ Notation: $\leftarrow$ ist zu lesen als "wird ersetzt durch"

Analog: Transformation einer Matrix durch Zeilenumformungen
(Einfach rechte Seite ignorieren)

Elimination von x_ℓ aus der k. Zeile in der i. Zeile ($a_{k,\ell} \neq 0$); Matrixperspektive:

$$
\begin{bmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\ell} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\ell} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,\ell} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,\ell} & \dots & a_{j,k} & \dots & a_{j,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,\ell} & \dots & a_{m,k} & \dots & a_{m,n}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\ell \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .
$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\ell} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\ell} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,\ell} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1}-ta_{i,1} & a_{j,2}-ta_{i,2} & \dots & 0 & \dots & a_{j,k}-ta_{i,k} & \dots & a_{j,n}-ta_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,\ell} & \dots & a_{m,k} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\ell \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_j - tb_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

mit $t := \dfrac{a_{j,\ell}}{a_{i,\ell}}$.

Satz I.3.1.G (Invarianz der Lösungsmenge unter Zeilenumformungen)**.**
Unterwirft man ein lineares Gleichungssystem in $n \in \mathbb{N}$ Unbekannten und mit $m \in \mathbb{N}$ Gleichungen den Zeilenumformungen

$$\begin{aligned} \text{Zeile}\, j &\leftarrow \text{Zeile}\, j + \beta \cdot \text{Zeile}\, i\,, \quad j,i \in \{1,\dots,m\},\ i \neq j\,, \\ \text{Zeile}\, j &\leftarrow \alpha \cdot \text{Zeile}\, j\,, \qquad\qquad\qquad j \in \{1,\dots,m\},\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,, \end{aligned}$$

dann ändert sich seine Lösungsmenge nicht.

1.3.2 Zeilenstufenform

✎ Notation: j. Einheitsvektor $\in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n \quad , \quad (\mathbf{e}_j)_k = \begin{cases} 1 & \text{, wenn } k = j \;, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad , \quad k \in \{1, \dots, n\} \;.$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\dots\; \mathbf{e}_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \;.$$

Definition I.3.2.A (Zeilenstufenform einer Matrix)**.**
Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$*,* $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$*, ist in* *Zeilenstufenform (ZFS), falls es eine Zahl* $r \in \mathbb{N}$*,* $r \leqslant \min\{n, m\}$ *und Indices*

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$$

so gibt, dass

$$(\mathbf{A})_{:,i_k} = \mathbf{e}_k \quad \textit{und} \quad \begin{cases} j < i_k \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A})_{i,j} = 0 & \textit{für alle } i \geqslant k \;, \\ \qquad\qquad (\mathbf{A})_{i,j} = 0 & \textit{, wenn} \quad i > r \;, \end{cases} \qquad k \in \{1, \ldots, r\} \;.$$

Die Matrixspalten $(\mathbf{A})_{:,i_k}$*,* $k \in \{1, \ldots, r\}$*, heissen* *Pivotspalten* *von* $\mathbf{A}$*.*

$$\text{Zeilenstufenform} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \star & 0 & \star & 0 & \star & & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \star & 0 & \star & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \star & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \quad r\text{. Zeile} \\ \\ \end{array} \tag{ZSF}$$

($\star$ steht für beliebige Matrixeinträge.)

1.3.3 Gausselimination: Algorithmus

LINK zur Präsentation des Gaussalgorithmus in Beispielen

Satz I.3.3.A (Transformierbarkeit von LGS in Zeilenstufenform durch Zeilenumformungen)**.**
Jedes *lineare Gleichungssystem lässt sich durch Zeilenumformungen gemäss Definition I.3.1.A in ein lineares Gleichungssystem transformieren, dessen Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform gemäss Definition I.3.2.A vorliegt.*

Korollar I.3.3.C (Transformierbarkeit von Matrizen in Zeilenstufenform durch Zeilenumformungen)**.**
Jede *beliebige $m \times n$-Matrix lässt sich durch Zeilenumformungen analog zu Definition I.3.1.A auf Zeilenstufenform gemäss Definition I.3.2.A transformieren.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Algorithmus Gausselimination: Transformation eines linearen Gleichungssystems auf Zeilenstufenform

Gegeben: LGS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

$\ell := 1$ *% ℓ ist ein Zeilenindex*

$j := 1$ *% j ist ein Spaltenindex*

$r := 0$ *% Meta-Index für Pivotspalten*

while $(j \leqslant n)$ **do**

{ *% Suche nach Pivotelement*

$i := \ell$ *% i ist ein Zeilenindex (Hilfsvariable)*

while $(i \leqslant m$ **and** $(\mathbf{A})_{i,j} = 0)$ **do** { $i \leftarrow i + 1$ }

if $(i \leqslant m)$ **then** *% $(\mathbf{A})_{\ell:m,j} = \mathbf{0}$, wenn $i > m$!*

{ $i_{r+1} := j$ *% Speichere Position der Pivotspalte*

Zeilenvertauschung: i. Zeile$(\mathbf{A})$ $\longleftrightarrow$ ℓ. Zeile$(\mathbf{A})$

Zeilenskalierung: ℓ. Zeile$(\mathbf{A}) \leftarrow \frac{1}{(\mathbf{A})_{\ell,j}} \cdot$ ℓ. Zeile$(\mathbf{A})$

for $(k \in \{1, \ldots, m\} \backslash \{\ell\})$ **do**

{ Zeilenkombination: k. Zeile$(\mathbf{A}) \leftarrow k$. Zeile$(\mathbf{A})$ $-(\mathbf{A})_{k,j} \cdot$ ℓ. Zeile$(\mathbf{A})$ }

$\ell \leftarrow \ell + 1$ *% Eine Zeile weniger zu bearbeiten*

$r \leftarrow r + 1$ *% (Eventuell) weiter zu nächster Pivotspalte*

}

$j \leftarrow j + 1$ *% Weiter zu nächster Spalte*

}

Ausgabe: Lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in Zeilenstufenform
(Koeffizientenmatrix/Rechte-Seite-Vektor modifiziert!)
Anzahl r und Indices $i_1, \ldots, i_r$ der Pivotspalten

Satz I.3.3.C (Transformation auf Zeilenstufenform durch Gausselimination)**.**
Die Gausselimination (siehe Algorithmus) transformiert eine beliebiges *lineares Gleichungssystem durch Zeilenumformungen gemäss Definition I.3.1.A auf Zeilenstufenform nach Definition I.3.2.A.*

Korollar I.3.3.D (Invarianz der Lösungsmenge bei Gausselimination)**.**
Die bei Gausselimination stattfindende Transformation eines lineares Gleichungssystems ändert dessen Lösungsmenge nicht. p

Satz I.3.3.F (Eindeutigkeit der Zeilenstufenform)**.**
Die nach Satz I.3.3.A/Korollar I.3.3.C durch Zeilenumformungen hergestellten Zeilenstufenformen von linearen Gleichungssystemen/Matrizen sind eindeutig.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition I.3.3.H (Rang einer Matrix)**.**
Die Anzahl r der Pivotspalten in der *Zeilenstufenform einer Matrix bezeichnet man als Rang der Matrix (in Zeichen: $\mathrm{Rang}(\mathbf{A})$ für eine Matrix $\mathbf{A}$).*

Beispiel I.3.3.K (Zeilenstufenform von (verallgemeinerten) Dreiecksmatrizen)*.*

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $n \geqslant m$, heisst verallgemeinerte Dreiecksmatrix, wenn $(\mathbf{A})_{i,j} = 0$ für $i > j$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & \cdots & a_{1,m} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & \cdots & a_{2,m} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a_{m-1,m} & \cdots & a_{m-1,n} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & a_{m,m} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} .$$

Annahme: $\quad a_{i,i} \neq 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}$.

► Zeilenstufenform:

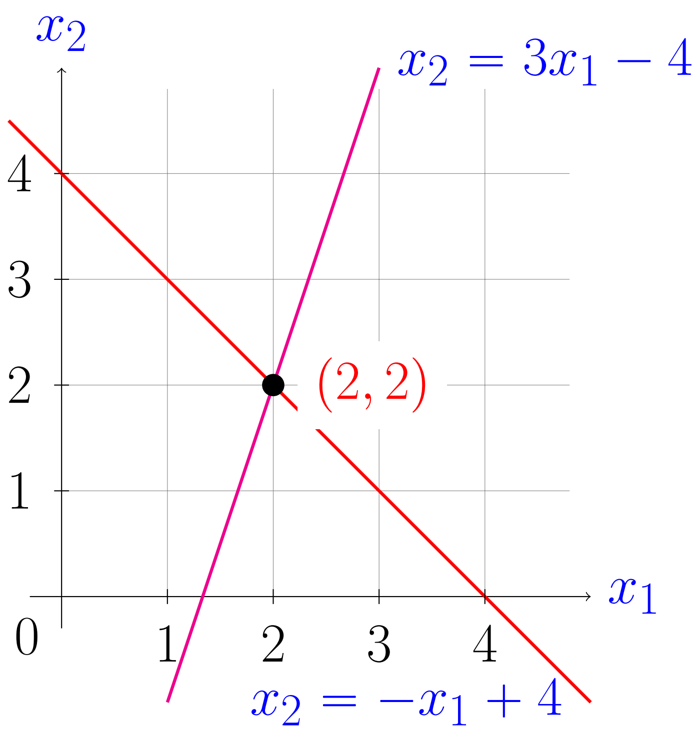
$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{1,m+1} & \cdots & z_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{2,m+1} & \cdots & z_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & z_{m-1,m+1} & \cdots & z_{m-1,n} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & z_{m,m+1} & \cdots & z_{m,n} \end{bmatrix} .$$

m Pivotspalten: $i_j = j$, $j = 1, \dots, m$ ➢ $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = m$.

◇

1.3.4 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

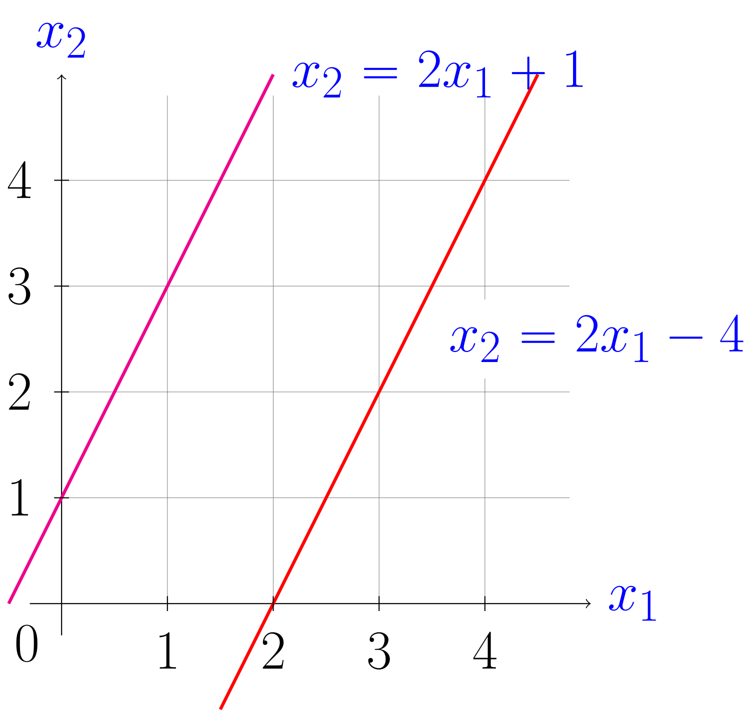
Veranschaulichung von Lösungsmengen im Kartesischen Koordinatensystem für $n = m = 2$ und $n = m = 3$:



Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 \; + \; x_2 &= 4 \\ 6x_1 \; - \; x_2 &= 8 \end{aligned}$$

◁
- Lösungsmengen der einzelnen linearen Gleichungen sind Hyperebenen in 2D (Geraden)
- Schnittpunkt der Geraden ist *eindeutige* Lösung des LGS

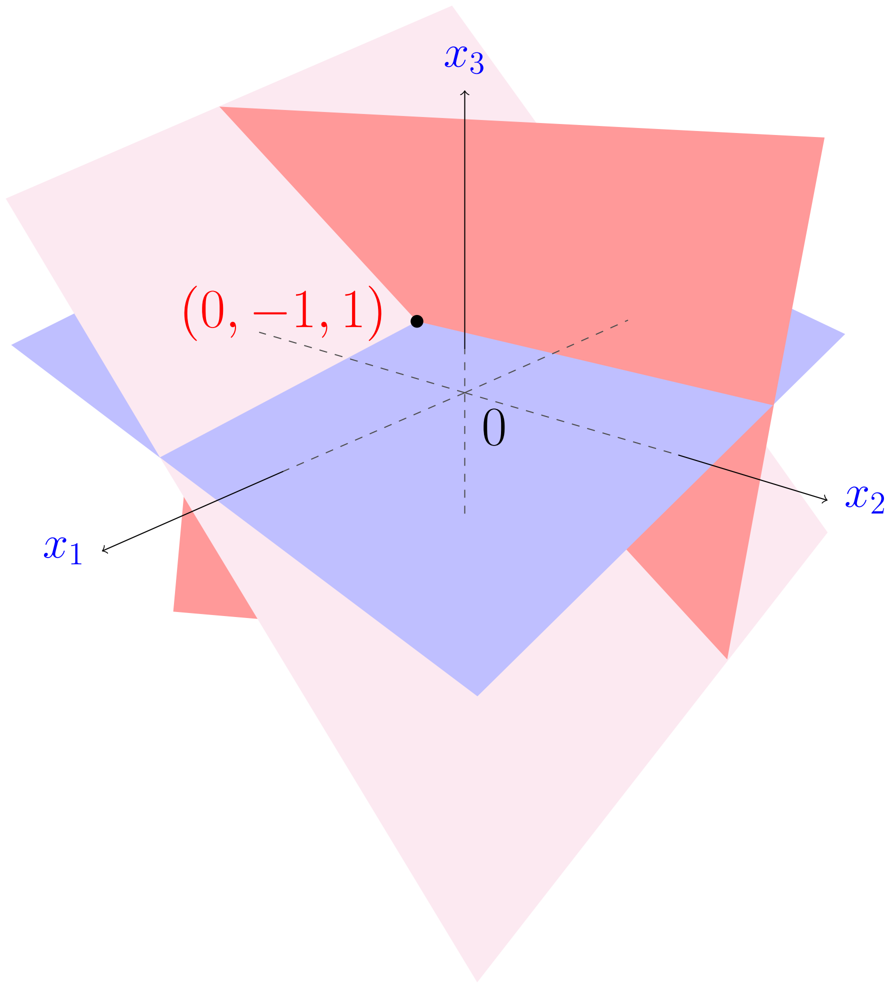


Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 &= 4 \,. \end{aligned}$$

◁ Lösungsmengen der linearen Gleichungen $\hat{=}$ parallele Geraden

keine Lösung



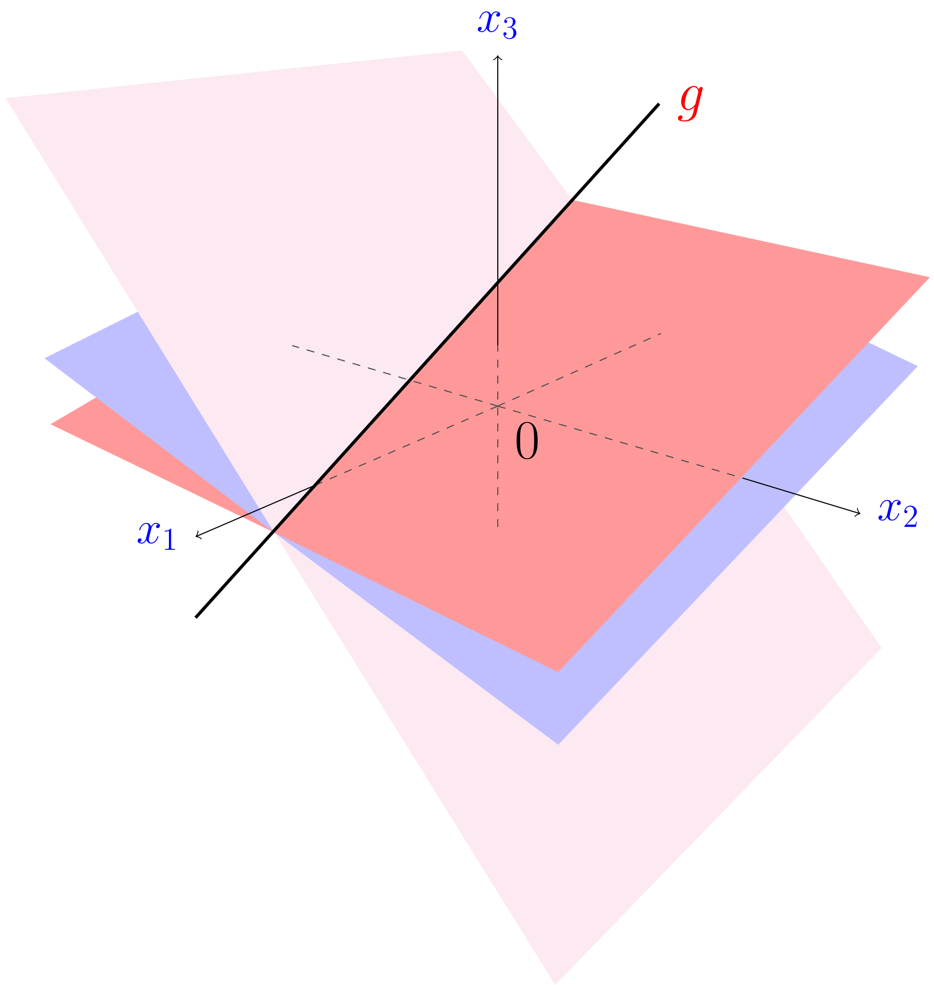
Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 16x_3 &= 12 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1\,. \end{aligned}$$

$\lhd$

- Lösungsmengen der linearen Gleichungen $\hat{=}$ Ebenen
- Eindeutige Lösung **=** Schnittpunkt von drei Ebenen

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 16x_3 &= 12 \\ -7x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 4x_2 + 4x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

$\triangleleft$ Lösungsmenge = Gerade im Schnitt der drei Ebenen: unendlich viele Lösungen.

Satz I.3.4.B (Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems)**.**
Sei $\mathbf{Z}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, *die Zeilenstufenform eines linearen Gleichungssystems gemäss Definition I.3.2.A,* $r := \operatorname{Rang}(\mathbf{Z})$ *(→ Definition I.3.3.H),* $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$ *die* geordnete *(*$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$*) Indexmenge der Pivotspalten,* $\{j_1, \ldots, j_{n-r}\} := \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$ *(leer, wenn* $r = n$*).*

(i) Dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, wenn $y_j \neq 0$ *für ein* $j > r$.

(ii) Andernfalls ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ *von* $\operatorname{LGS}(\mathbf{Z}; \mathbf{y})$ *gegeben durch*

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} (\mathbf{x})_{i_k} = y_k - \sum\limits_{\ell=1}^{n-r} \alpha_\ell \cdot (\mathbf{Z})_{k,j_\ell},\ k \in \{1, \ldots, r\}\ , \\ (\mathbf{x})_{j_\ell} = \alpha_\ell,\ \ell \in \{1, \ldots, n-r\} \end{array},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R} \right\}$$

Korollar I.3.4.D (Existenz von Lösungen eines linearen Gleichungssystems)**.**
Falls $\operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = m$ *für* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *dann hat das lineare Gleichungssystem* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *für jeden Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *mindestens eine Lösung:*

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \text{und} \quad \operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(\operatorname{LGS}(\mathbf{A}; \mathbf{b})) \neq \emptyset \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m\ .$$

Korollar I.3.4.E (Eindeutige Lösbarkeit von quadratischen LGS)**.**
Gilt $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$ *für eine* quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *dann hat das lineare Gleichungssystem* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *für* *jeden* *Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *eine* *eindeutige* *Lösung:*

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \textit{und} \quad \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n \quad \Longrightarrow \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n\colon \quad \exists_1 \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\colon \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \, .$$

Satz I.3.4.F (Eindeutigkeit aus Existenz)**.**
Wenn für eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *das lineare Gleichungssystem* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *für* *jeden* *Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *eine Lösung besitzt, dann ist* $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$*:*

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}\colon \quad \Big(\quad \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A}; \mathbf{b})) \neq \emptyset \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n \quad \Big) \, .$$

Korollar I.3.4.G (Lineare Gleichungssysteme mir rechter Seite)**.**
Falls $n > m$, *so hat das lineare Gleichungssystem* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *mit Koeffizientenmatrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *unendlich viele Lösungen.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

2 Rechnen mit Vektoren und Matrizen

2.1 Vektorrechnung im n-dimensionalen Raum

Definition II.1.0.B (Grundoperationen der Vektorarithmetik)**.**
Vektoraddition: Für beliebige Spaltenvektoren $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *definieren wir ihre Summe* $\mathbf{v}+\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ komponentenweise *durch*

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})_i := (\mathbf{v})_i + (\mathbf{w})_i\ , \quad i \in \{1,\dots,n\}\ .$$

Skalarmultiplikation: Für einen beliebigen Spaltenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definieren wir das Produkt* $\alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ komponentenweise *wie folgt:*

$$(\alpha \cdot \mathbf{v})_i := \alpha \cdot (\mathbf{v})_i\ , \quad i \in \{1,\dots,n\}\ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ w_n + v_n \end{bmatrix} \quad , \quad \alpha \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{bmatrix}$$

Satz II.1.0.D (Rechenregeln für die Vektoroperationen)**.**
Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

Vektoraddition kommutativ:	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$,	(VR1)
Vektoraddition assoziativ:	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$,	(VR2)
Vektoraddition, neutrales Element:	$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$,	(VR3)
Skalarmultiplikation assoziativ:	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v})$,	(VR4)
Skalarmultiplikation, neutrales Element:	$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$,	(VR5)
Distributivgesetze:	$\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w}$,	(VR6)
	$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}$.	(VR7)

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

2.2 Linearkombinationen und Matrix-Vektor-Produkt

Motivation: Eine andere Sicht auf LGS

"Matrixnotation": $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\Updownarrow$$

LGS:
$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

Vektorgleichung:
$$x_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

Vektorgleichung kompakt: $x_1(\mathbf{A})_{:,1} + x_2(\mathbf{A})_{:,2} + \cdots + x_n(\mathbf{A})_{:,n} = \mathbf{b}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition II.2.0.A (Linearkombination von (Spalten)vektoren)**.**
Gegeben sei eine Menge von $n \in \mathbb{N}$ *(Spalten)vektoren* $\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n\} \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. *Für reelle Zahlen* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ *heisst*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{a}^j = c_1 \mathbf{a}^1 + \cdots + c_n \mathbf{a}^n \qquad \text{(II.2.0.B)}$$

eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^n$ *mit (reellen) Koeffizienten* c_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Lineares Gleichungssystem **=** Linearkombination von Matrixspalten mit *unbekannten Koeffizienten*:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j (\mathbf{A})_{:,j} = \mathbf{b} \; . \qquad \text{(II.2.0.C)}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition II.2.0.D (Matrix-Vektor-Multiplikation)**.**
Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *und* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ *ist das Matrix-Vektor-Produkt* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{m}$ *definiert durch*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})_i := \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{A})_{i,j} v_j \;, \quad i \in \{1, \dots, m\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j (\mathbf{A})_{:,j} \;.$$

Ausgeschrieben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Ax}} \;.$$

$$i\text{-te Zeile} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ \boxed{* \;\; * \;\; * \;\; *} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \end{matrix}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ \boxed{*} \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}}_{\mathbf{Ax}} \leftarrow (\mathbf{Ax})_i$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Linearkombination geschrieben mit Matrix-Vektor-Produkt:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{a}^j = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \dots, \mathbf{a}^n] \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} .$$

$m \times n$-Matrix, erzeugt durch Nebeneinanderschreiben der Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j \in \mathbb{R}^m$

Bemerkung II.2.0.F (Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen).

Spezielle Zeilenstufenform (vgl. Beispiele aus Abschnitt 1.3.4):

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{1,r+1} & \dots & z_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{2,r+1} & \dots & z_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & z_{r-1,r+1} & \dots & z_{r-1,n} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & z_{r,r+1} & \dots & z_{r,n} \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} , \quad \mathrm{Rang}(\mathbf{Z}) = r \leqslant \min\{m, n\} .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

$$\overset{(\mathbf{y})_{r+1:m}=0}{\blacktriangleright} \quad \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{Z};\mathbf{y})) = \left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{y})_{1:r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{1,r+1} & z_{1,r+2} & \cdots & \cdots & z_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ z_{r,r+1} & z_{r,r+2} & \cdots & \cdots & z_{r,n} \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{c},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\} .$$

$$\blacktriangleright \quad \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{Z};\mathbf{0})) = \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,r+1} & z_{1,r+2} & \cdots & \cdots & z_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ z_{r,r+1} & z_{r,r+2} & \cdots & \cdots & z_{r,n} \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{c},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\}$$

$$= \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} z_{1,r+1} \\ \vdots \\ z_{r,r+1} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_{1,r+2} \\ \vdots \\ z_{r,r+2} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} z_{1,n-1} \\ \vdots \\ z_{r,n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_{1,n} \\ \vdots \\ z_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} .$$

△

2.3 Matrixprodukt

Definition II.3.0.B (Matrixprodukt)**.**
Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ *sei* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{k,n}$. *Das Matrixprodukt* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *ist* <u>elementweise</u> *definiert durch*

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})_{i,j} := \sum_{\ell=1}^{k} (\mathbf{B})_{i,\ell} (\mathbf{S})_{\ell,j} \ , \quad i \in \{1, \dots, m\}, \, j \in \{1, \dots, n\} \ .$$

$$
i\text{-te Zeile} \rightarrow
\underset{\mathbf{B}}{\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}}
\underset{\mathbf{S}}{\begin{array}{c} j\text{-te Spalte} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{array}}
=
\underset{\mathbf{A} = \mathbf{B}\,\mathbf{S}}{\begin{array}{c} j\text{-te Spalte} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \end{array}}
\leftarrow i\text{-te Zeile}
$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Schema für Rechnung mit Bleistift und Papier:

$$
\begin{array}{cc}
 & \mathbf{S} \\
 & \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\
\mathbf{B} & \mathbf{A} = \mathbf{B}\,\mathbf{S}
\end{array}
$$

Beispiel: $m = 2, n = 4, k = 3$

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{S} := \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{S} \\ & \begin{pmatrix} \boxed{7} & -1 & 1 & 0 \\ \boxed{-8} & -2 & 0 & -1 \\ \boxed{9} & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{6} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 18 & -14 & 1 & -2 \\ \boxed{42} & -32 & 4 & -5 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} = \mathbf{B}\,\mathbf{S} \end{array}$$

Beispiel II.3.0.G (Inneres Produkt von Zeilen- und Spaltenvektor).

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1,k} \quad \leftrightarrow \quad$ Zeilenvektor $\mathbf{a}^\top = [a_1, \dots, a_k]$
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,1} = \mathbb{R}^k \quad \leftrightarrow \quad$ Spaltenvektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$

$$\mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{b} = [a_1, \dots, a_k] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \left[\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell b_\ell \right] \in \mathbb{R} \ .$$

◇

Beispiel II.3.0.H (Äusseres Produkt/Tensorprodukt von Spalten- und Zeilenvektor).

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,1} \leftrightarrow$ Spaltenvektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{1,n} \leftrightarrow$ Zeilenvektor $\mathbf{a}^\top = [b_1, \dots, b_n]$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \cdot [b_1, \dots, b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & \dots & a_m b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} ,$$

$$\boxed{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\top)_{i,j} = (\mathbf{a})_i \cdot (\mathbf{b}^\top)_j} , \quad i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} .$$

Beispiel II.3.0.J (Multiplikation mit Diagonalmatrix).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad , \quad \begin{aligned} \mathbf{D} &:= \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{R}^{m,m} , \\ \mathbf{T} &:= \operatorname{diag}(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n,n} . \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 a_{1,1} & d_1 a_{1,2} & \dots & d_1 a_{1,n} \\ d_2 a_{2,1} & d_2 a_{2,2} & \dots & d_2 a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_m a_{m,1} & d_m a_{m,2} & \dots & d_m a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}: \quad \boxed{(\mathbf{D}\cdot\mathbf{A})_{i,j} = d_i (\mathbf{A})_{i,j}}$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1 a_{1,1} & t_2 a_{1,2} & \dots & t_n a_{1,n} \\ t_1 a_{2,1} & t_2 a_{2,2} & \dots & t_n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 a_{m,1} & t_2 a_{m,2} & \dots & t_n a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}: \quad \boxed{(\mathbf{A}\cdot\mathbf{T})_{i,j} = t_j (\mathbf{A})_{i,j}}$$

► $\mathbf{I}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$ für Einheitsmatrix $\mathbf{I}_k = \mathrm{diag}(1,\dots,1) \in \mathbb{R}^{k,k}$.

◇

Beispiel II.3.0.K (Zeilenkombination durch Matrixmultiplikation).

$$
\mathbf{A}' := \begin{bmatrix}
1 & 0 & & \dots & & & & & & & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & & & & & & & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & \ddots & 0 \\
0 & \dots & & & & & & & & \dots & 1
\end{bmatrix}
\underbrace{\begin{bmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n}
\end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m,n}} .
$$

▶ $\mathbf{A}'$ geht aus $\mathbf{A}$ durch die Zeilenkombination (→ Definition I.3.1.A)

i. Zeile ← i. Zeile $+\alpha\cdot$ j. Zeile

hervor.

◇

Satz II.3.0.L (Assoziativität der Matrixmultiplikation).
Für $m, n, k, \ell \in \mathbb{N}$ *und beliebige* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,\ell}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{\ell,n}$ *gilt*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \ .$$

2.4 Matrixkalkül

Definition II.4.0.B (Grundoperationen der Matrixarithmetik).
Matrixaddition: Für beliebige Matrizen gleicher Grössse $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *definieren wir ihre Summe* $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$ elementweise *durch*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{i,j} := (\mathbf{A})_{i,j} + (\mathbf{B})_{i,j} \ , \quad i \in \{1, \dots, n\}, \ j \in \{1, \dots, m\} \ .$$

Skalarmultiplikation: Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definieren wir das Produkt* $\alpha \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \alpha \in \mathbb{R}^{m,n}$ elementweise *wie folgt:*

$$(\alpha \cdot \mathbf{A})_{i,j} = (\mathbf{A} \cdot \alpha)_{i,j} := \alpha \cdot (\mathbf{A})_{i,j} \ , \quad i \in \{1, \dots, n\}, \ j \in \{1, \dots, m\} \ .$$

Echte Verallgemeinerung der Vektoroperationen von Definition II.1.0.B.

Satz II.4.0.D (Rechenregeln für die Matrixoperationen)**.**
Für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

Matrixaddition kommutativ:	$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{C} + \mathbf{B}$,	(M1)
Matrixaddition assoziativ:	$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$,	(M2)
Matrixaddition, neutrales Element:	$\mathbf{B} + \mathbf{O}_{m,n} = \mathbf{B}$,	(M3)
Skalarmultiplikation assoziativ:	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{B} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{B})$,	(M4)
Skalarmultiplikation, neutrales Element:	$1 \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$,	(M5)
Distributivgesetze:	$\alpha \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \alpha \cdot \mathbf{B} + \alpha \cdot \mathbf{C}$,	(M6)
	$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{B} = \alpha \cdot \mathbf{B} + \beta \cdot \mathbf{B}$.	(M7)

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz II.4.0.F (Distributivgesetze für Matrixmultiplikation)**.**
Für alle $m, n, k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,k}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{k,n} .$$
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{k,n} .$$

Korollar II.4.0.G (Verträglichkeit von Matrixmultiplikation und Skalarmultiplikation)**.**
Für alle $m, n, k \in \mathbb{N}$ *und* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,n}$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{B}) \ .$$

2.5 Inverse Matrix

Definition II.5.0.A (Invertierbare/reguläre Matrix)**.**
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *heisst invertierbar oder regulär, wenn es eine Matrix* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *so gibt, dass*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I}_n \quad \textit{oder} \quad \mathbf{XA} = \mathbf{I}_n \ ,$$

wobei $\mathbf{I}_n$ *die* $n \times n$*-Einheitsmatrix bezeichnet.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Beispiel II.5.0.B (Inverse einer 2×2-Matrix).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}: \qquad \underbrace{\frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \cdot \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{I}_2} . \tag{II.5.0.B}$$

Notwendig: $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$ **!**

◇

Satz II.5.0.C (Inverse einer Matrix)**.**

Zu jeder invertierbaren Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gibt es eine* eindeutig *bestimmte Matrix* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n,n}$*, die* *Inverse von* $\mathbf{A}$*, so, dass*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}_n .$$

✎ Notation: $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n} \hat{=}$ eindeutige Inverse von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz II.5.0.E (Kriterien für Invertierbarkeit einer Matrix).
Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathbf{A}$ *hat vollen (maximalen) Rang:* $\operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = n$.

(ii) Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *besitzt für jedes* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *eine die eindeutige Lösung.*

(iii) das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *hat nur die* triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(iv) $\mathbf{A}$ *ist invertierbar.*

Satz II.5.0.F (Invertierbarkeit von Produktmatrizen).
Für quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathbf{A}$ ***und*** $\mathbf{B}$ *sind invertierbar,*

(ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *ist invertierbar,*

(iii) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ *ist invertierbar.*

Treffen die Aussagen zu, dann gilt ferner

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad \textit{und} \quad (\mathbf{B}\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} \,. \tag{II.5.0.G}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz II.5.0.J (Transformation von LGS mit invertierbaren Matrizen)**.**
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$*,* $m, n \in \mathbb{N}$*, und* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m,m}$ *eine invertierbare quadratische Matrix. Dann gilt die Gleichheit der Lösungsmengen:*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{b})) = \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{MA};\mathbf{Mb})) \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m .$$

2.6 Transponierte Matrix

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition II.6.0.A (Transponierte Matrix)**.**
Zu einer gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$*,* $mn, \in \mathbb{N}$*, heisst* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,m}$ *mit*

$$(\mathbf{B})_{i,j} = (\mathbf{A})_{j,i} \;, \quad i \in \{1,\dots,n\}, j \in \{1,\dots,m\} \;.$$

die Transponierte von $\mathbf{A}$

✎ Notation: $\mathbf{A}^\top \hat{=}$ Transponierte von $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,m} \;.$$

Satz II.6.0.C (Rechenregeln für die Tranponierten)**.**
Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\left(\mathbf{A}^\top\right)^\top = \mathbf{A} \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} \;, \tag{T1}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top \qquad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n} \;, \tag{T2}$$

$$(\alpha\mathbf{A})^\top = \alpha \cdot \mathbf{A}^\top \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}, \forall \alpha \in \mathbb{R} \;, \tag{T3}$$

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}, \forall \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,n} \;. \tag{T4}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Korollar II.6.0.F (Inverse der Transponierten).
Die Transponierte jeder invertierbaren Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *ist wiederum invertierbar und es gilt*

$$\left(\mathbf{A}^\top\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top . \tag{T5}$$

✎ Notation: Inverse der Transponierten: $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top = \mathbf{A}^{-\top}$

Definition II.6.0.J (Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen).
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *heisst symmetrisch, falls* $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$.
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *heisst schiefsymmetrisch, falls* $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$.

Korollar II.6.0.K (Inverse (schief-)symmetrischer Matrizen).
Die Inverse einer invertierbaren (schief-)symmetrischen Matrix ist wieder (schief-)symmetrisch.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

2.7 Blockmatrixoperationen

Matrixpartitionierung:

$$
\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\ell} & a_{1,\ell+1} & \dots & a_{1,k} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\ell} & a_{2,\ell+1} & \dots & a_{2,k} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,\ell} & a_{i,\ell+1} & \dots & a_{i,k} \\
\hline
a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,\ell} & a_{i+1,\ell+1} & \dots & a_{i+1,k} \\
a_{i+2,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+2,\ell} & a_{i+2,\ell+1} & \dots & a_{i+2,k} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,\ell} & a_{m,\ell+1} & \dots & a_{m,k}
\end{array}\right]
= \left[\begin{array}{c|c}
(\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} & (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} \\
\hline
(\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} & (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k}
\end{array}\right]
$$

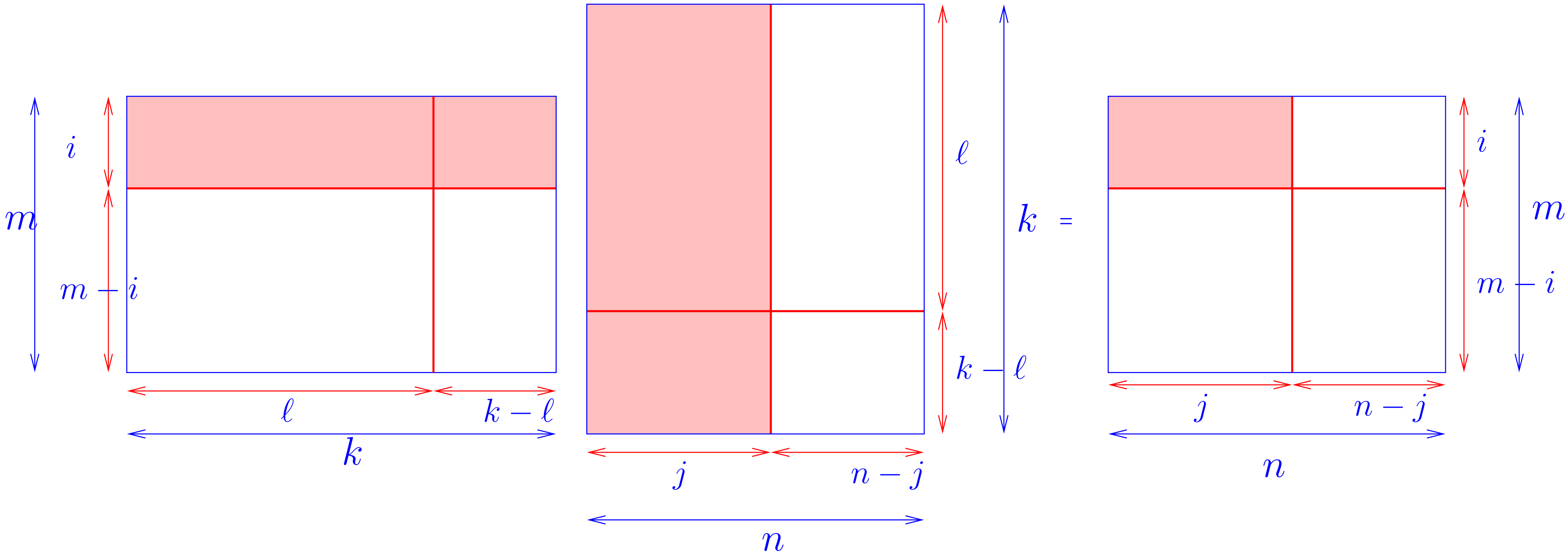
$$
\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccc|ccc}
b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,j} & b_{1,j+1} & \dots & b_{1,n} \\
b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,j} & b_{2,j+1} & \dots & b_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{\ell,1} & b_{\ell,2} & \dots & b_{\ell,j} & b_{\ell,j+1} & \dots & b_{\ell,n} \\
\hline
b_{\ell+1,1} & b_{\ell+1,2} & \dots & b_{\ell+1,j} & b_{\ell+1,j+1} & \dots & b_{\ell+1,n} \\
b_{\ell+2,1} & b_{\ell+1,2} & \dots & b_{\ell+2,j} & b_{\ell+2,j+1} & \dots & b_{\ell+2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{k,1} & b_{k,2} & \dots & b_{k,j} & b_{k,j+1} & \dots & b_{k,n}
\end{array}\right]
= \left[\begin{array}{c|c}
(\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} & (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} \\
\hline
(\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n}
\end{array}\right]
$$

Satz II.7.0.B (Blockmatrixmultiplikation)**.**

Es seien $m, k, n, i, \ell, j \in \mathbb{N}$ *mit* $i \leqslant m$*,* $\ell \leqslant k$*,* $j \leqslant n$*. Dann gilt für beliebige Matrizen* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$*,* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,n}$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{1:i,1:j} &= (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} + (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j}\;,\\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{1:i,j+1:n} &= (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} + (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n}\;,\\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{i+1:m,1:j} &= (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} + (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j}\;,\\
(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{i+1:m,j+1:n} &= (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} + (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n}
\end{aligned}
$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



R. Hiptmair
SAM, ETHZ

$$\left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} & (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} \\ \hline (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} & (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} & (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} \\ \hline (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n} \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} \cdot (\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} + (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} \cdot (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} \cdot (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} + (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} \cdot (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n} \\ \hline (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} \cdot (\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} + (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k} \cdot (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} \cdot (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} + (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k} \cdot (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n} \end{array}\right]$$

Kompakte Notation für Matrixblöcke:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{1,1} &:= (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} &&\in \mathbb{R}^{i,\ell}\,, \\
\mathbf{A}_{1,2} &:= (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} &&\in \mathbb{R}^{i,k-\ell}\,, \\
\mathbf{A}_{2,1} &:= (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} &&\in \mathbb{R}^{m-i,k}\,, \\
\mathbf{A}_{2,2} &:= (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k} &&\in \mathbb{R}^{m-i,k-\ell}\,,
\end{aligned}
\quad \blacktriangleright \quad
\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \hline \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{array}\right]\,,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{1,1} &:= (\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} &&\in \mathbb{R}^{\ell,j}\,, \\
\mathbf{B}_{1,2} &:= (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} &&\in \mathbb{R}^{\ell,n-j}\,, \\
\mathbf{B}_{2,1} &:= (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} &&\in \mathbb{R}^{k-\ell,j}\,, \\
\mathbf{B}_{2,2} &:= (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n} &&\in \mathbb{R}^{k-\ell,n-j}\,,
\end{aligned}
\quad \blacktriangleright \quad
\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} \\ \hline \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2} \end{array}\right]\,.$$

Kompakte Notation für Blockmatrixmultiplikation:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \hline \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} \\ \hline \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{1,2} + \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,2} \\ \hline \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{1,2} + \mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,2} \end{array}\right]$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}$$

Beispiel II.7.0.D (Multiplikation von Pfeilmatrizen).

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_n \\ d_1 & \dots & \dots & d_n & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1,n+1} \quad , \quad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & q_n \\ p_1 & \dots & \dots & p_n & \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1,n+1} .$$

▶ Schnelle Berechnung von $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ durch Blockmatrixmultiplikation

◇

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Anwendung: Lösung von LGS mit Blockelimination

Blockpartitionierung des LGS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{M}$:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A}_{1,1} := (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} & \in \mathbb{R}^{i,\ell}\,, & \\ \mathbf{A}_{1,2} := (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:n} & \in \mathbb{R}^{i,n-\ell}\,, & \\ \mathbf{A}_{2,1} := (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} & \in \mathbb{R}^{m-i,k}\,, & \\ \mathbf{A}_{2,2} := (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:n} & \in \mathbb{R}^{m-i,n-\ell} & \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \mathbf{b}_1 := (\mathbf{b})_{1:i}\,, \\ \mathbf{b}_2 := (\mathbf{b})_{i+1:m} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} \mathbf{x}_1 := (\mathbf{x})_{1:\ell}\,, \\ \mathbf{x}_2 := (\mathbf{x})_{\ell+1:n}\,. \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \hline \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \hline \mathbf{x}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{b}_2 \end{array}\right]\,.$$

Wenn $i = l$ und $\mathbf{A}_{1,1}$ invertierbar:

$$\underbrace{\left(\mathbf{A}_{2,2} - \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{A}_{1,1}^{-1}\mathbf{A}_{1,2}\right)}_{\text{Schur-Komplement-Matrix}} \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{A}_{1,1}^{-1}\mathbf{b}_1\,. \tag{II.7.0.F}$$

Beispiel II.7.0.H (Blockelimination bei Pfeilmatrizen).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_n \\ d_1 & \dots & \dots & d_n & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$$

◇

3 Unterräume und Basen

✎ Notation: $\mathcal{V} := \mathbb{R}^{m,n} \hat{=}$ Menge von $m \times n$-Matrizen, $m, n \in \mathbb{N}$ (in jedem Kontext sind m, n fest, aber oft nicht eigens spezifiziert)

Spezialfälle: Spaltenvektoren ($n = 1$), Zeilenvektoren ($m = 1$)

Sprachgebrauch: Elemente von $\mathcal{V}$ werden als "Vektoren" bezeichnet, auch wenn es sich vielleicht um Matrizen handelt.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

3.1 Erzeugnisse und Unterräume

Definition III.1.0.A (Span/Erzeugnis)**.**
Für gegebene Vektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k \in \mathcal{V}$*,* $k \in \mathbb{N}$*, heisst die* Menge

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \ldots \mathbf{v}^k\}) := \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{v}^j,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left[\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\right] \cdot \mathbf{a},\ \ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^k \right\}$$

aller möglicher Linearkombinationen (→ Definition II.2.0.A) von $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$ *der Span oder das Erzeugnis von* $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$*.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Veranschaulichung: Geraden durch $\mathbf{0}$ im $\mathbb{R}^2$, Geraden & Ebenen durch $\mathbf{0}$ im $\mathbb{R}^3$

Konvention: $\mathrm{Span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$

Definition III.1.0.C (Unterraum)**.**

Eine (Teil)menge von Vektoren $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *heisst Unterraum (UR), wenn gilt*

- $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathcal{U}$,
- $\mathbf{v} \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ *für jedes* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Korollar III.1.0.D (Schnitt von Unterräumen)**.**

Sind $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ *Unterräume von* $\mathcal{V}$*, dann ist auch* $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ *ein Unterraum.*

Die vielen Gesichter von '+':

- $\alpha + \beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ für Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$: Vektoraddition/Matrixaddition, Definitionen II.1.0.B, II.4.0.B
- **Addition eines Vektors zu einer Menge** $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$**!**

$$\mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad , \quad \mathcal{M} \subset V: \quad \mathbf{v} + \mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} : \; \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{m} \text{ für ein } \mathbf{m} \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{V} \; .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

- **Addition zweier Mengen $\mathcal{U},\mathcal{W}\subset\mathcal{V}$!**

$$\mathcal{U},\mathcal{W}\subset\mathcal{V}:\quad \mathcal{U}+\mathcal{W}:=\{\mathbf{x}\in\mathcal{V}:\ \mathbf{x}=\mathbf{u}+\mathbf{w}\text{ für irgendwelche }\mathbf{u}\in\mathcal{U},\ \mathbf{w}\in\mathcal{W}\}\subset\mathcal{V}\ .$$

Korollar III.1.0.F (Summe von Unterräumen)**.**

Sind $\mathcal{U},\mathcal{W}\subset\mathcal{V}$ Unterräume von $\mathcal{V}$, dann ist auch $\mathcal{U}+\mathcal{W}$ ein Unterraum.

Satz III.1.0.G (Erzeugnisse sind Unterräume)**.**

Für eine Teilmenge $\mathcal{U}\subset\mathcal{V}$ sind äquivalent:

(i) Es gibt $k\in\mathbb{N}$ und Vektoren $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\in\mathcal{V}$, so dass $\mathcal{U}=\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\})$.

(ii) $\mathcal{U}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{V}$.

Definition III.1.0.H (Erzeugendensystem)**.**

Gilt für einen Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$, dass $\mathcal{U}=\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\})$ für Vektoren $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\in\mathcal{V}$, so heisst die Menge $\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}$ ein Erzeugendensystem (ES))von $\mathcal{U}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition III.1.0.J (Affiner Teilraum)**.**

Eine (Teil)menge von Vektoren $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ *heisst affiner Teilraum von* $\mathcal{V}$*, wenn es einen* Unterraum $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *von* $\mathcal{V}$ *und einen Vektor* $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ *so gibt, dass* $\mathcal{A} = \mathbf{v} + \mathcal{U}$.

$\mathcal{U}$ *heisst der zu* $\mathcal{A}$ *parallele Unterraum.*

Satz III.1.0.K (Nichtleere Lösungsmengen von LGS sind affine Teilräume)**.**

Die Lösungsmenge eines lineare Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *mit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$*, und* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *ist entweder leer oder eine affiner Teilraum von* $\mathbb{R}^n$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

3.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

Definition III.2.0.B (Lineare (Un)abhängigkeit)**.**
Eine endliche Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}\subset\mathcal{V}$, $k\in\mathbb{N}$, *heisst linear unabhängig (l.u.), falls die Vektoren sich nur trivial zu Null linear kombinieren lassen:*

$$\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}\subset\mathcal{V}\quad \textit{l.u.}\quad :\Leftrightarrow\quad \left(\ \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\mathbf{v}^k=\mathbf{0}\quad\Rightarrow\quad \alpha_j=0\ \forall j\in\{1,\dots,k\}\ \right)$$

Andernfalls heisst $\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}$ *linear abhängig (l.a.).*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Lemma III.2.0.C („Überflüssiger Vektor" im Erzeugendensystem)**.**
Ist $\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}\subset\mathcal{V}$, $k\in\mathbb{N}$, *linear abhängig, dann gibt es* $j\in\{1,\dots,k\}$ *so, dass*

$$\mathbf{v}^j\in\operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}\setminus\{\mathbf{v}^j\})\quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\})=\operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}\setminus\{\mathbf{v}^j\})\ .$$

Lemma III.2.0.D (Minimales Erzeugendensystem)**.**
Ist $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, linear unabhängig *so gilt für* alle $j \in \{1, \dots, k\}$

$$\operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \setminus \{\mathbf{v}^j\}) \neq \operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}) \ .$$

Lemma III.2.0.E. *Ist* $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, *linear unabhängig und*

$$\mathbf{w} \in \mathcal{V} \quad \textit{mit} \quad \mathbf{w} \notin \operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}) \ ,$$

dann ist auch die Menge $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}$ *linear unabhängig.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Lemma III.2.0.F (Transformation linear (un)abhängiger Mengen im n-dimensionalen Raum)**.**
Für jede invertierbare Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gilt*

$$\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathbb{R}^n \quad \textit{l.u.} \quad \Longleftrightarrow \quad \{\mathbf{M}\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{M}\mathbf{v}^k\} \subset \mathbb{R}^n \quad \textit{l.u.} \ .$$

Definition III.2.0.G (Basis)**.**
Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem *eines Unterraums* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *heisst eine* *Basis* *von* $\mathcal{U}$.

Korollar III.2.0.H (Existenz von Basen)**.**
Jeder nichttriviale ($\neq \{\mathbf{0}\}$) Unterraum von $\mathcal{V}$ besitzt eine Basis.

Satz III.2.0.J (Gleichmächtigkeit von Basen)**.**
Alle Basen eines Unterraums $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ besitzen die gleiche Anzahl von Elementen.

Definition III.2.0.K (Dimension)**.**
Die Anzahl der Elemente einer (beliebigen) Basis eines Unterraums (→ Definition III.1.0.C) wird als dessen Dimension bezeichnet.
Die Dimension eines affinen Teilraums (→ Definition III.1.0.J) ist die Dimension des parallelen Unterraums.

✎ Notation: $\dim \mathcal{U} \mathrel{\hat{=}}$ Dimension des Unterraums $\mathcal{U}$

Konvention: $\dim\{\mathbf{0}\} := 0$

Korollar III.2.0.L (Monotonie der Dimension)**.**
Für zwei Unterräume $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ *gilt*

$$\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{W} \leqslant \dim \mathcal{U} \ .$$

Lemma III.2.0.M (Lineare Abhängigkeit von mehr als $\dim$ Vektoren)**.**
Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *ein Unterraum und* $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{U}$*,* $k \in \mathbb{N}$*.*

Ist $k > \dim \mathcal{U}$*, dann ist* $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\}$ *linear abhängig.*

Satz III.2.0.N (Dimensionssatz für Unterräume)**.**
Für beliebige Unterräume $\mathcal{W}, \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *gilt*

$$\dim(\mathcal{W} + \mathcal{U}) = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{U} - \dim(\mathcal{W} \cap \mathcal{U}) \ .$$

Satz III.2.0.P (Mächtigkeiten von Vereinigungs- und Schnittmengen).
Für beliebige endliche Teilmengen $\mathcal{M}, \mathcal{L}$ *einer Menge gilt*

$$\sharp(\mathcal{M} \cup \mathcal{L}) = \sharp\mathcal{M} + \sharp\mathcal{L} - \sharp(\mathcal{M} \cap \mathcal{L}) \ .$$

✎ Notation: $\sharp\mathcal{M} \hat{=}$Anzahl der Elemente (Mächtigkeit) einer endlichen Menge $\mathcal{M}$

3.3 Bild und Kern von Matrizen, Dimensionssatz

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition III.3.0.B (Bild und Kern einer Matrix).
Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *ist ihr Kern oder Nullraum definiert durch*

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A}; \mathbf{0})) \ ,$$

während ihr Bild oder Spaltenraum gegeben ist durch

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{A}\mathbf{c}, \ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Span}(\{(\mathbf{A})_{:,1}, \dots, (\mathbf{A})_{:,n}\}) \ .$$

Korollar III.3.0.D.
Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *ist* $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ *ein Unterraum von* $\mathbb{R}^n$, *und* $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ *ein Unterraum von* $\mathbb{R}^m$.

Satz III.3.0.F (Darstellungssatz für den Kern einer Matrix)**.**
Sei $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ *die Zeilenstufenform der Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gemäss Definition I.3.2.A,* $r := \mathrm{Rang}(\mathbf{Z})$ *(→ Definition I.3.3.H).*

(i) Falls $r = n$, *dann ist* $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

(ii) Falls $r < n$, *dann ist*

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{z}^1, \dots \mathbf{z}^{n-r}\})$$

$$\textit{mit} \quad (\mathbf{z}^\ell)_j = \begin{cases} (\mathbf{Z})_{k,j_\ell} & \text{, für } j = i_k,\ k \in \{1,\dots,r\}\ , \\ -1 & \text{, für } j = j_\ell\ , \\ 0 & \text{, für } j \notin \{i_1,\dots,i_r,j_\ell\} \end{cases} \quad , \quad \ell \in \{1,\dots,n-r\}\ ,$$

wobei $\{i_1,\dots,i_r\} \subset \{1,\dots,n\}$ *die* geordnete *(*$i_1 < i_2 < \cdots < i_r$*) Indexmenge der Pivotspalten,* $\{j_1,\dots,j_{n-r}\} := \{1,\dots,n\} \backslash \{i_1,\dots,i_r\}$.

Satz III.3.0.G (Darstellungssatz für das Bild einer Matrix)**.**
Sei $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *die Zeilenstufenform der Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gemäss Definition I.3.2.A,* $r := \mathrm{Rang}(\mathbf{Z})$ *(→ Definition I.3.3.H), und* $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$ *die geordnete* ($i_1 < i_2 < \cdots < i_r$) *Indexmenge der Pivotspalten von* $\mathbf{A}$*. Dann gilt*

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Span}\left(\left\{(\mathbf{A})_{:,i_1} \ldots, (\mathbf{A})_{:,i_r}\right\}\right) .$$

Korollar III.3.0.H (Dimensionssatz für Matrizen)**.**
Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gilt*

(i) $\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{A})$,

(ii) $\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) + \dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = n$.

Satz III.3.0.I (Invarianz des Rangs)**.**
Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und jede invertierbare Matrix* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m,m}$ *gilt*

$$\mathrm{Rang}(\mathbf{MA}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Korollar III.3.0.J (Darstellungssatz für die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems)**.**
Zu einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *einem Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *gebe es* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *so, dass* $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. *Dann gilt*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{b})) = \mathbf{y} + \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \ .$$

Satz III.3.0.K (Transformationen von Erzeugendensystemen)**.**
Gegeben sei eine beliebige Menge $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k\}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}) \ ,$$

wenn

(i) $$\mathbf{w}^\ell = \begin{cases} \mathbf{v}^\ell & \text{für } \ell \neq j \ , \\ \mathbf{v}^j + \beta \mathbf{v}^i & \text{für } \ell = j \ . \end{cases}$$ *für beliebige* $i, j \in \{1, \dots, l\}$, $i \neq j$, *und* $\beta \in \mathbb{R}$.

(ii) $$\mathbf{w}^\ell = \begin{cases} \mathbf{v}^\ell & \text{für } \ell \neq j \ , \\ \alpha \mathbf{v}^j & \text{für } \ell = j \ . \end{cases}$$ *für beliebige* $j \in \{1, \dots, k\}$ *und* $\alpha \neq 0$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Korollar III.3.0.L (Invarianz des Zeilenraums unter Zeilenumformungen)**.**
Die Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *gehe durch Zeilenumformungen gemäss Definition I.3.1.A aus der Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *hervor. Dann gilt*

$$\operatorname{Span}(\{(\mathbf{B})_{1,:}, \ldots, (\mathbf{B})_{m,:}\}) = \operatorname{Span}(\{(\mathbf{A})_{1,:}, \ldots, (\mathbf{A})_{m,:}\}) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Bild}(\mathbf{B}^\top) = \operatorname{Bild}(\mathbf{A}^\top) \ .$$

Satz III.3.0.M (Zeilenrang einer Matrix)**.**
Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gilt*

$$\dim \operatorname{Bild}(\mathbf{A}^\top) = \dim \operatorname{Span}(\{(\mathbf{A})_{1,:}, \ldots, (\mathbf{A})_{m,:}\}) = \operatorname{Rang}(\mathbf{A}) \ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz III.3.0.P (Kriterien für Invertierbarkeit, vgl. Satz II.5.0.E)**.**

Für eine quadratische *Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *sind äquivalent:*

(i) $\mathbf{A}$ *ist invertierbar,*

(ii) $\mathbf{A}$ *hat vollen (maximalen) Rang:* $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$,

(iii) $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ *(* $\Leftrightarrow$ *Matrixspalten linear unabhängig)*

(iv) $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}^\top) = \{\mathbf{0}\}$, *(* $\Leftrightarrow$ *Matrixzeilen linear unabhängig)*

(v) $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

3.4 Koeffizientenvektoren und Basiswechsel

Korollar III.4.0.B (Eindeutigkeit der Basisdarstellung)**.**
Sei $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k\}$, $k \in \dim \mathcal{U}$*, eine Basis des Unterraums* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$*.*
Dann gibt es zu jedem $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ *eindeutige Koeffizienten* $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ *so, dass*

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{b}^j \ . \qquad \text{(III.4.0.C)}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition III.4.0.D (Koordinaten/Koeffizienten)**.**
Die eindeutigen Zahlen $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ *aus Korollar III.4.0.B heissen die Koordinaten oder Koeffizienten des Vektors* $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ *bezüglich der Basis* $\mathcal{B}$*.*
Der Spaltenvektor $\mathbf{c} := \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$ *heisst der Koordinatenvektor oder Koeffizientenvektor von* $\mathbf{u}$ *bzgl.* $\mathcal{B}$ *und* (III.4.0.C) *seine Basisdarstellung.*

Satz III.4.0.F (Basiswechselmatrix)**.**
Seien $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\}$ *und* $\widetilde{\mathcal{B}} := \{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}^n\}$ *Basen des* n*-dimensionalen Unterraums* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$*.*
Dann ist die Basiswechselmatrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$*, definiert durch*

$$\widetilde{\mathbf{b}}^j = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{S})_{i,j} \mathbf{b}^i \;, \tag{III.4.0.E}$$

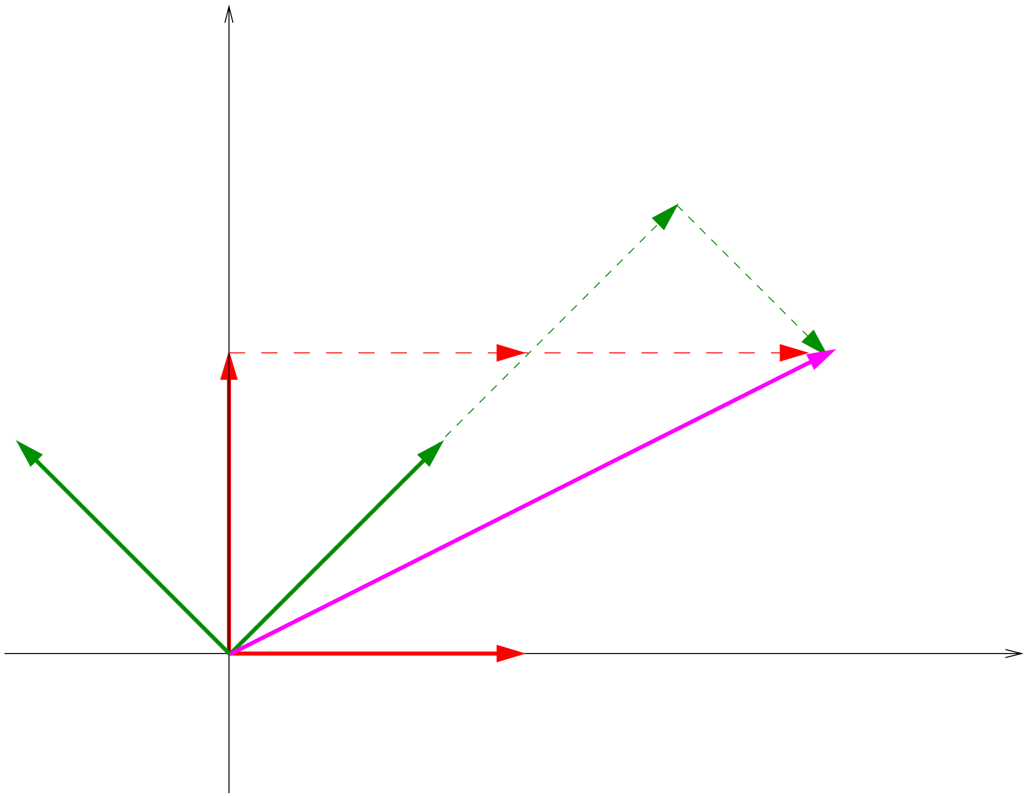
invertierbar.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz III.4.0.H (Basiswechsel)**.**
Seien $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\}$ *und* $\widetilde{\mathcal{B}} := \{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}^n\}$ *zwei Basen des* n*-dimensionalen Unterraums* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *mit zugehöriger Basiswechselmatrix* $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$*.*
Dann besteht zwischen den Koordinatenvektoren $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\widetilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$ *eines Vektors* $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ *bzgl.* $\mathcal{B}$ *bzw.* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *die Beziehung*

$$\widetilde{\mathbf{c}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{c} \;.$$

(Koordinaten in der „neuen Basis" $\mathcal{B}$ *erhält man aus den Koordinaten bzgl. der „alten Basis" durch Lösen eines linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix* $\mathbf{S}$*.)*



◁ Zwei Basen (rot/grün) von $\mathbb{R}^2$ und die Darstellung eines Vektors durch Linearkombinationen von Basisvektoren.

Clickerfragen

Clickerfrage 3.4.1 (Kern und Bild von Matrizen).

Für $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ gilt $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

□ richtig □ falsch

Clickerfrage 3.4.2 (Dimensionssatz).

Es gibt eine 3×3-Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3,3}$ so, dass $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

□ richtig □ falsch

Clickerfrage 3.4.3 (Kern und Bild von Matrizen).

Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist bekannt, dass $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Dann ist $\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) > \dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

Clickerfrage 3.4.4 (Kern und Bild von Matrizen).

Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist bekannt, dass $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$. Dann ist $\mathrm{Rang}\, \mathbf{A} \leqslant \frac{n}{2}$.

□ richtig □ falsch

4 Der Euklidische Raum

4.1 Das Euklidische Skalarprodukt

4.1.1 Definition und Eigenschaften

Definition IV.1.1.A (Euklidisches Skalarpodukt)**.**
Das Euklidische Skalarprodukt (ESP) im $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine Abbildung, die jedem Paar $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ eine reelle Zahl zuordnet gemäss der Vorschrift

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := \sum_{\ell=1}^{n} v_\ell w_\ell \in \mathbb{R}$$

wenn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$.

▶ vgl. Bsp. II.3.0.G (inneres Produkt): $\boxed{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^\top \mathbf{w}}$

Satz IV.1.1.C (Eigenschaften des Euklidischen Skalarprodukts)**.**
Für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt:*

Skalarprodukt kommutativ: $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$, (ESP1)

distributiv bzgl. $\cdot$*:* $\langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \alpha\mathbf{w} \rangle$, (ESP2)

distributiv bzgl. $+$*:* $\langle \mathbf{v} + \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, (ESP3)

Positive Definitheit: $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$. (ESP4)

Korollar IV.1.1.D (Linearität des Euklidischen Skalarprodukts in jedem Argument)**.**
Für das Euklische Skalarprodukt gelten die Rechenregeln:

(i) (Linearität im ersten Argument)

$$\langle \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle = \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \beta\langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\,, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) (Linearität im zweiten Argument)

$$\langle \mathbf{w}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}\rangle = \alpha\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle + \beta\langle \mathbf{w}, \mathbf{u}\rangle \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\,, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\,.$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Korollar IV.1.1.F (Transponierte Matrix und Skalarprodukt)**.**

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}^\top\mathbf{w}\rangle \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m\,.$$

4.1.2 Länge von Vektoren im n dimensionalen Raum

Definition IV.1.2.A (Länge/(Euklidische) Vektornorm)**.**
Die Länge oder (Euklidische) Vektornorm eines Vektors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *ist definiert durch*

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} .$$

Definition IV.1.2.B (Normierter Vektor)**.**
Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *heisst normiert, wenn* $\|\mathbf{v}\| = 1$.

Satz IV.1.2.C (Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU))**.**

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n . \tag{CSU}$$

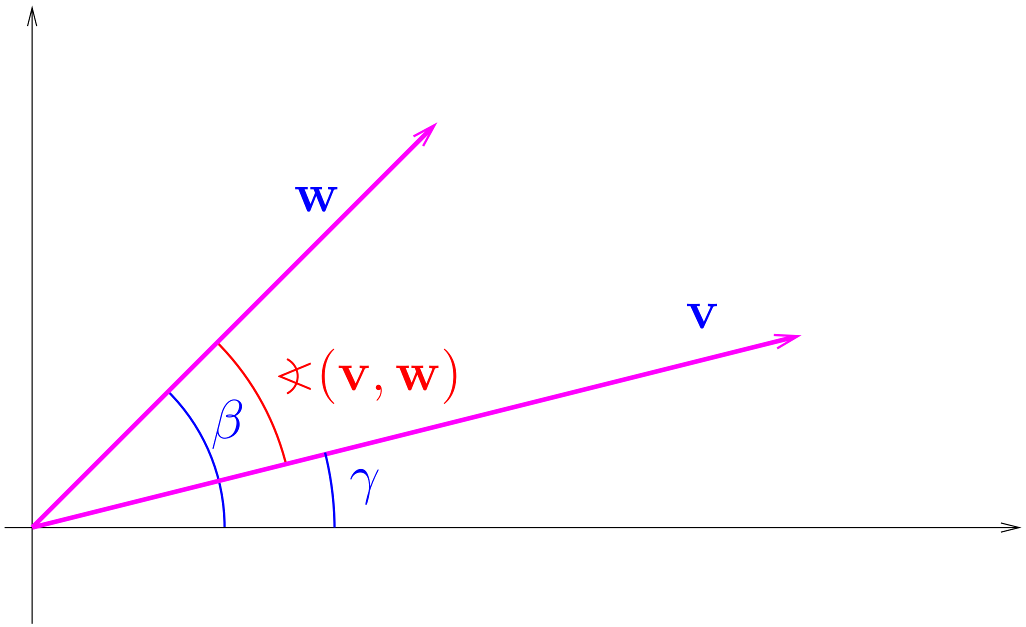
Gleichheit gilt genau dann, *wenn* $\mathbf{v}$ *und* $\mathbf{w}$ *linear abhängig sind.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz IV.1.2.E (Dreiecksungleichung für Vektornorm).

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \quad \forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n . \qquad (\triangle\text{-UG})$$

4.1.3 Winkel

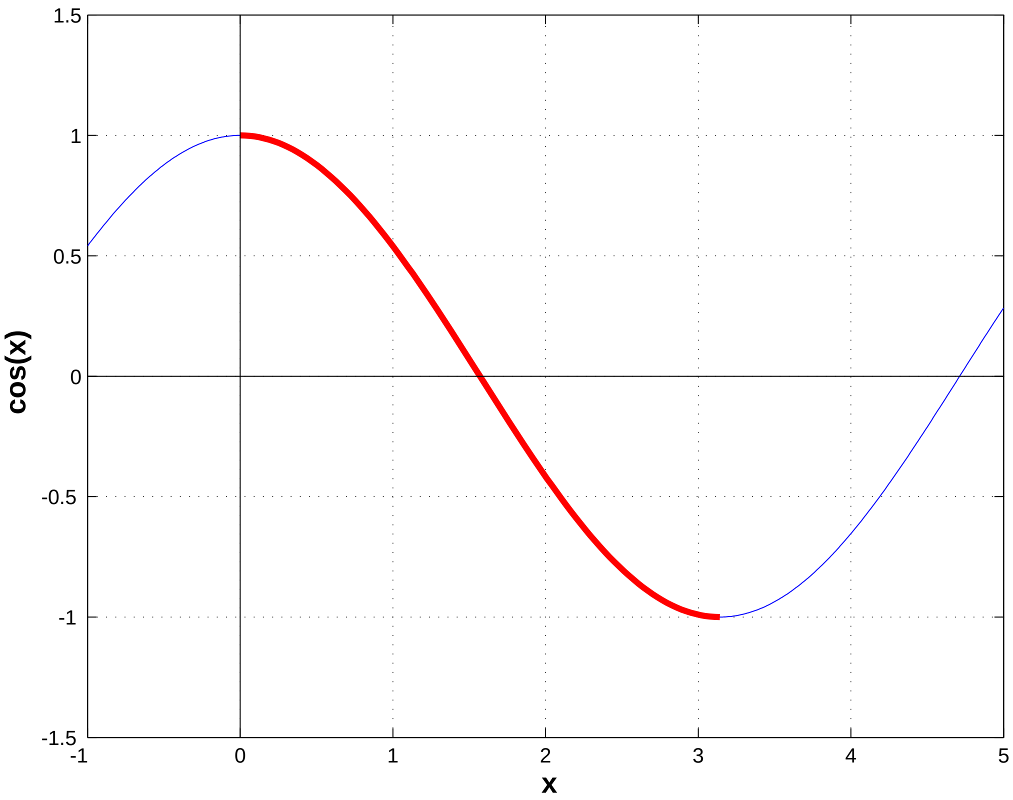


$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \begin{bmatrix}\cos\gamma \\ \sin\gamma\end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\| \begin{bmatrix}\cos\beta \\ \sin\beta\end{bmatrix} \quad ,$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

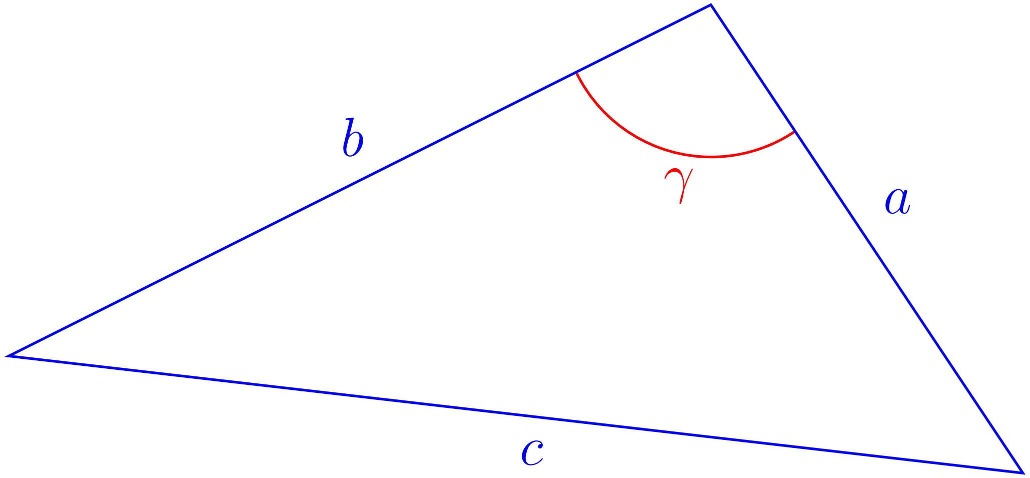
Definition IV.1.3.A (Winkel zwischen Vektoren)**.**
Der Winkel $\sphericalangle(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in [0,\pi]$ *(im Bogenmass) zwischen zwei Vekoren* $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *ist definiert durch*

$$\cos\left(\sphericalangle(\mathbf{v},\mathbf{w})\right) := \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \langle \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \rangle \,.$$



◁ Kosinus ist umkehrbar im für die Winkelberechnung relevanten Bereich.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



Im Dreieck:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\ .$$

Satz IV.1.3.C (Kosinussatz)**.**

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|\cos\left(\sphericalangle(\mathbf{v},\mathbf{w})\right) \quad \forall \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}\ .$$

Definition IV.1.3.E (Senkrecht/orthogonal)**.**
Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *heissen senkrecht oder orthogonal, wenn* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$*:*

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \qquad \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \quad :\Leftrightarrow \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \; .$$

Zwei Teilmengen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ *und* $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ *heissen sind orthogonal, in Zeichen* $\mathcal{F} \perp \mathcal{G}$*, wenn*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{F}, \; \forall \mathbf{w} \in \mathcal{G}: \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \; .$$

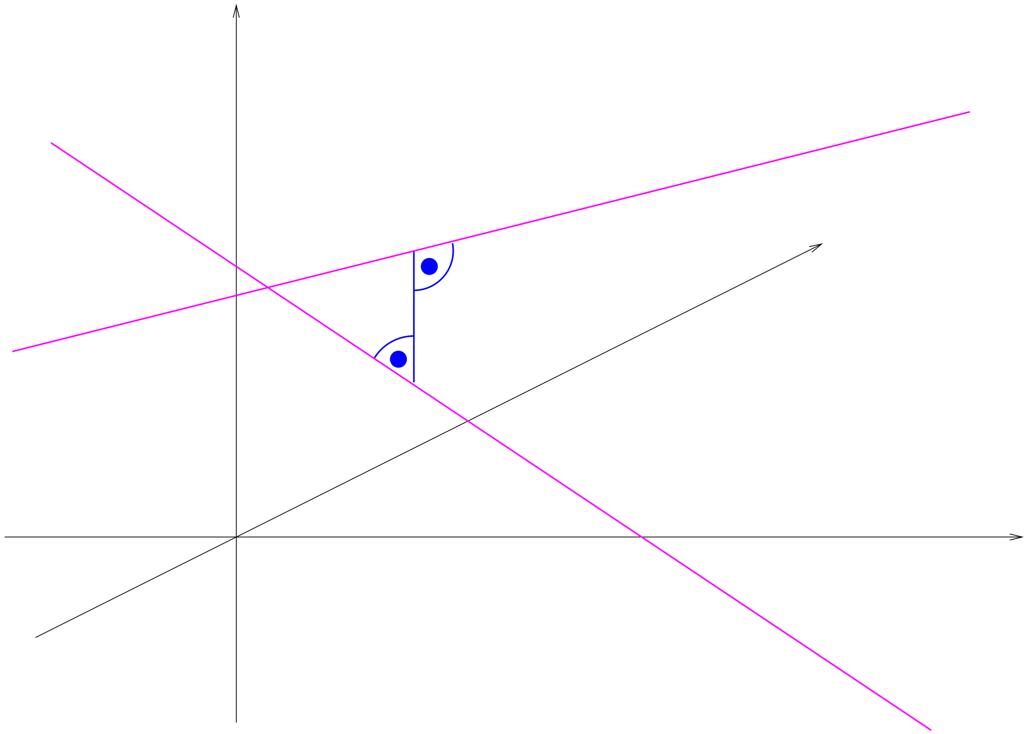
4.2 Abstand

4.2.1 Abstandsbegriff

Definition IV.2.1.B (Abstand von affinen Teilräumen)**.** *Der Abstand von zwei affinen Teilräumen* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ *von* $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *ist definiert durch*

$$\operatorname{dist}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \ \mathbf{x} \in \mathcal{G}, \ \mathbf{y} \in \mathcal{F}\} \ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



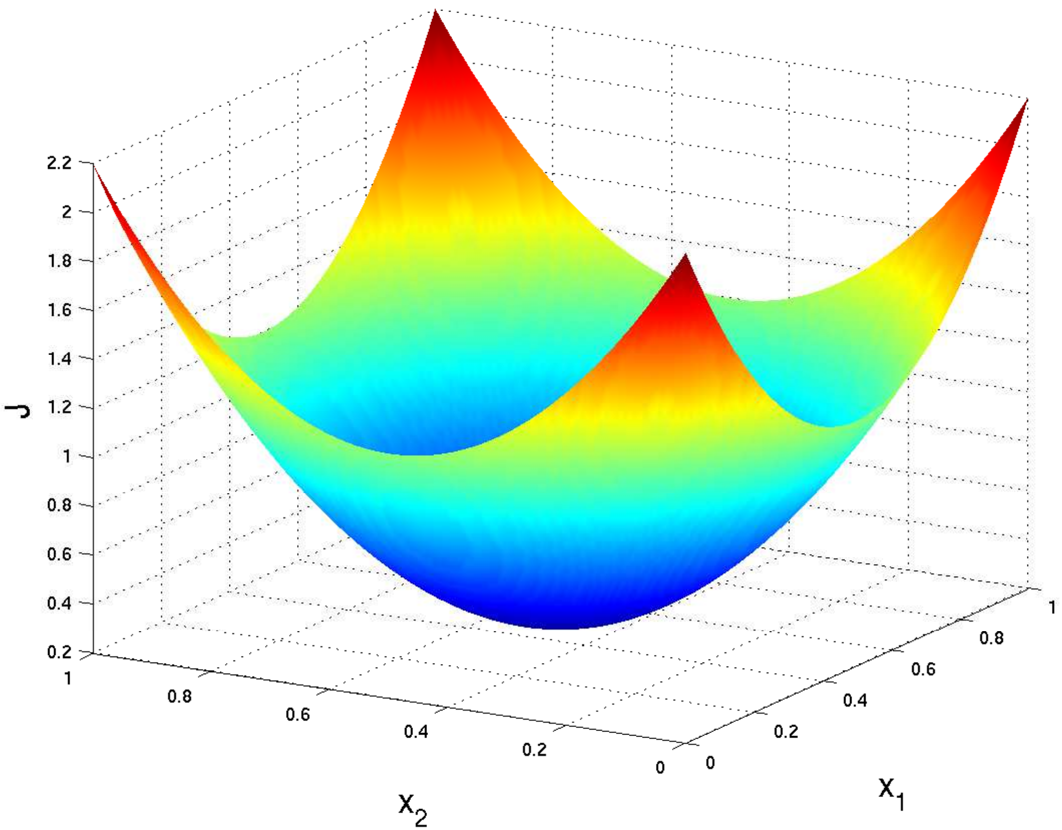
Abstand zweier Geraden im dreidimensionalen Raum:

Verbindungsstrecke der „nächsten Punkte” orthogonal zu beiden Geraden.

4.2.2 Ergänzung: Quadratische Formen

Definition IV.2.2.D (Quadratische Form)**.**
Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *heisst eine quadratische Form auf* $\mathbb{R}^n$, *wenn es eine Matrix* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$, *einen Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *und eine Zahl* $\gamma \in \mathbb{R}$ *so gibt, dass*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}^\top \mathbf{x} + \gamma\,, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,.$$



Graph einer quadratischen Form $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

(Jeder Schnitt entlang einer Geraden ist eine Parabel!)

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition IV.2.2.F (Positiv (semi-)definite Matrix)**.**
Für eine quadratische Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *definieren wir:*

(i) $\mathbf{M}$ *positive semidefinit* $:\Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{M} \mathbf{x} \geqslant 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

(i) $\mathbf{M}$ *positive definit* $:\Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}^\top \mathbf{M} \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Lemma IV.2.2.H (Invertierbarkeit positiv definiter Matrizen)**.**

Jede positiv definite Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist invertierbar (→ Definition II.5.0.A).

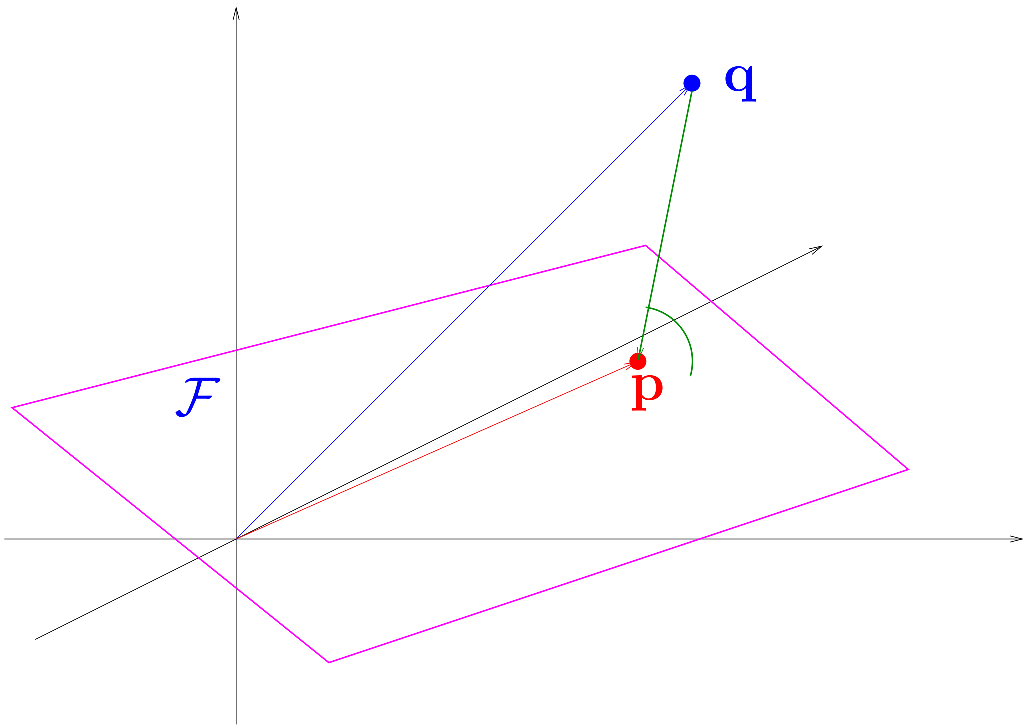
Satz IV.2.2.J (Normalengleichungsmatrizen)**.**

Hat $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,k}$, $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, vollen Rang k, dann ist $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ positiv definit:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,k}\,,\quad k \leqslant n: \qquad \mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = k \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A} \quad \textit{positiv definit}\,.$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

4.2.3 Orthogonale Projektion



Affiner Teilraum $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$, $k < n$,

$$\mathcal{F} = \mathbf{y} + \mathcal{U} \quad , \quad \mathcal{U} = \operatorname{Span}\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^k\} \ ,$$

$\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^k\}$ = Basis von $\mathcal{U}$

$$\mathbf{p} \in \mathcal{F} \quad , \quad \boxed{\mathbf{q} - \mathbf{p} \perp \mathcal{U}} \ .$$

$\rightarrow \hat{=} \mathbf{q} - \mathbf{p}$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Lemma IV.2.3.K (Normalengleichungsmatrizen II)**.**
Hat $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,k}$, $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, *vollen Rang* k, *dann ist* $\mathbf{B}^\top \mathbf{B}$ *invertierbar* (→ *Definition II.5.0.A).*

Satz IV.2.3.L (Orthogonale Projektion eines Vektors)**.**
Sei $\mathcal{F}$ ein affiner Teilraum (→ Definition III.1.0.J) von $\mathbb{R}^n$ parallel zum Unterraum $\mathcal{U}$, d.h. $\mathcal{F} = \mathbf{y} + \mathcal{U}$ für ein $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, und $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor.

(i) Es gibt es einen eindeutigen *Vektor $\mathbf{p} \in \mathcal{F}$, die orthogonale Projektion von $\mathbf{q}$ auf $\mathcal{F}$, so, dass*

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = \operatorname{dist}(\mathbf{q}, \mathcal{F}) = \min\{\|\mathbf{q} - \mathbf{w}\| : \mathbf{w} \in \mathcal{F}\} .$$

(ii) $\mathbf{p} \in \mathcal{F}$ *ist* genau dann *die orthogonale Projektion von $\mathbf{q}$ auf $\mathcal{F}$, wenn $\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle = 0$ für alle $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ (d.h. wenn $\mathbf{q} - \mathbf{p} \perp \mathcal{U}$).*

4.3 Orthogonalität

4.3.1 Orthogonale Vektoren

Definition IV.3.1.A (Orthogonale (Mengen von) Vektoren)**.**
Ein endliche Menge von Vektoren $\mathcal{Q} := \{\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^k\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, *heisst orthogonal, wenn*

$$i, j \in \{1, \dots, k\},\ i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{q}^i, \mathbf{q}^j \rangle = 0 \ .$$

Die Menge $\mathcal{Q}$ *heisst orthonormal, wenn zusätzlich*

$$\left\| \mathbf{q}^j \right\|^2 = \langle \mathbf{q}^j, \mathbf{q}^j \rangle = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, k\} \ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz IV.3.1.C (Lineare Unabhängigkeit orthogonaler Vektoren)**.**
Eine orthogonale Menge von Vektoren $\neq \mathbf{0}$ *ist linear unabhängig (→ III.2.0.B).*

Satz IV.3.1.D ("Satz von Pythagoras")**.**
Für eine orthogonale Menge $\mathcal{Q} := \{\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^k\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, *gilt*

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \mathbf{q}^j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j^2 \left\| \mathbf{q}^j \right\|^2 \quad \forall \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R} \; .$$

4.3.2 Orthogonale Komplemente

Definition IV.3.2.B (Orthogonales Komplement)**.**
Sei $\mathcal{U}$ *ein Unterraum (→ Definition III.1.0.C) von* $\mathbb{R}^n$ *der Dimension (→ Definition III.2.0.K)* $k \in \{0, \dots, n\}$.
Das orthogonale Komplement von $\mathcal{U}$ *(in* $\mathbb{R}^n$*) ist die Menge*

$$\mathcal{U}^\perp := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : \; \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0 \; \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}\} \; .$$

Korollar IV.3.2.D (Orthogonales Komplement als Unterraum)**.**
Sei $\mathcal{U}$ *ein Unterraum von* $\mathbb{R}^n$ *der Dimension* $k \in \{0, \ldots, n\}$*.*
Dann ist das orthogonale Komplement $\mathcal{U}^\perp$ *ebenfalls ein Unterraum und hat die Dimension* $n-k$*.*

Satz IV.3.2.F (Komplementeigenschaft von)**.**
Für jeden Unterraum $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{\mathbf{0}\} \quad \textit{und} \quad \mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp = \mathbb{R}^n \; .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

4.3.3 Orthogonale Matrizen

Definition IV.3.3.B (Orthogonale Matrix)**.**
Eine quadratische Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *heisst orthogonal, wenn* $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}_n$.

✎ Notation: $\mathcal{O}(n) \hat{=}$ Menge der orthogonalen Matrizen $\in \mathbb{R}^{n,n}$

Korollar IV.3.3.D (Produkte und Inverse orthogonaler Matrizen)**.**

$$\mathbf{Q},\mathbf{P}\in\mathcal{O}(n) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{QP}\in\mathcal{O}(n)\;,$$
$$\mathbf{Q}\in\mathcal{O}(n) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{Q}^{-1}\in\mathcal{O}(n)\;.$$

Lemma IV.3.3.F (Längenerhaltung bei Multiplikation mit orthogonaler Matrix)**.**

$$\mathbf{Q}\in\mathcal{O}(n) \quad\Rightarrow\quad \|\mathbf{Qx}\| = \|\mathbf{x}\| \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\;.$$

4.3.4 Orthogonalisierung

Lemma IV.3.4.A (Orthogonale Projektion mit orthonormalen Basen)**.**
Sei $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *und* $\{\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^k\}$ *eine orthonormale Basis (ONB) des Unterraums* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$*. Dann ist die* orthogonale Projektion $\mathbf{p}$ *von* $\mathbf{z}$ *auf* $\mathcal{U}$ *(→ Satz IV.2.3.L) gegeben durch*

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{z}, \mathbf{q}^j \rangle \, \mathbf{q}^j \ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Gram-Schmidt Orthonormalisierungsalgorithmus:

Gegeben: Endliche Menge von Vektoren $\{\mathbf{a}^1,\dots,\mathbf{a}^k\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $k \leqslant n$.

1: $\mathbf{q}^1 := \dfrac{\mathbf{a}^1}{\|\mathbf{a}^1\|}$ *% Erster der orthonormalen Vektoren*

2: **for** $j = 2,\dots,k$ **do**

{ *% Orthogonale Projektion auf das Erzeugnis der bisher berechneten Vektoren*

3: $\mathbf{q}^j := \mathbf{a}^j$

4: **for** $\ell = 1,2,\dots,j-1$ **do**

5: { $\mathbf{q}^j \leftarrow \mathbf{q}^j - \langle \mathbf{a}^j, \mathbf{q}^\ell \rangle \mathbf{q}^\ell$ }

6: **if** ($\mathbf{q}^j = \mathbf{0}$) **then** Abbruch

7: **else** { $\mathbf{q}^j \leftarrow \dfrac{\mathbf{q}^j}{\|\mathbf{q}^j\|}$ }

}

Ausgabe (wenn kein Abbruch):

Orthonormale Vektoren $\mathbf{q}^1,\dots,\mathbf{q}^k$ mit

$$\operatorname{Span}\{\mathbf{q}^1,\dots,\mathbf{q}^\ell\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}^1,\dots,\mathbf{a}^\ell\} \quad \forall \ell \in \{1,\dots,k\} \,. \tag{IV.3.4.C}$$

Lemma IV.3.4.D (Abbruch des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsalgorithmus)**.**
Ist $\{\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^\ell\}$, $\ell \leqslant k$, *linear unabhängig, so bricht der Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsalgorithmus frühestens nach dem* $\ell + 1$*. Schritt ab (oder gar nicht).*

Satz IV.3.4.F (QR-Zerlegung einer Matrix)**.**
Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,k}$ *mit* $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = k$ *gibt es*

(i) eine eindeutige *Matrix* $\mathbf{Q}_0 \in \mathbb{R}^{n,k}$, *die erfüllt* $\mathbf{Q}_0^\top \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}_k$, *und eine* eindeutige *Matrix* $\mathbf{R}_0 \in \mathbb{R}^{k,k}$ *mit* $(\mathbf{R}_0)_{i,j} = 0$ *für* $i > j$ *und* $(\mathbf{R}_0)_{i,i} > 0$, $i \in \{1, \dots, k\}$ *so, dass*

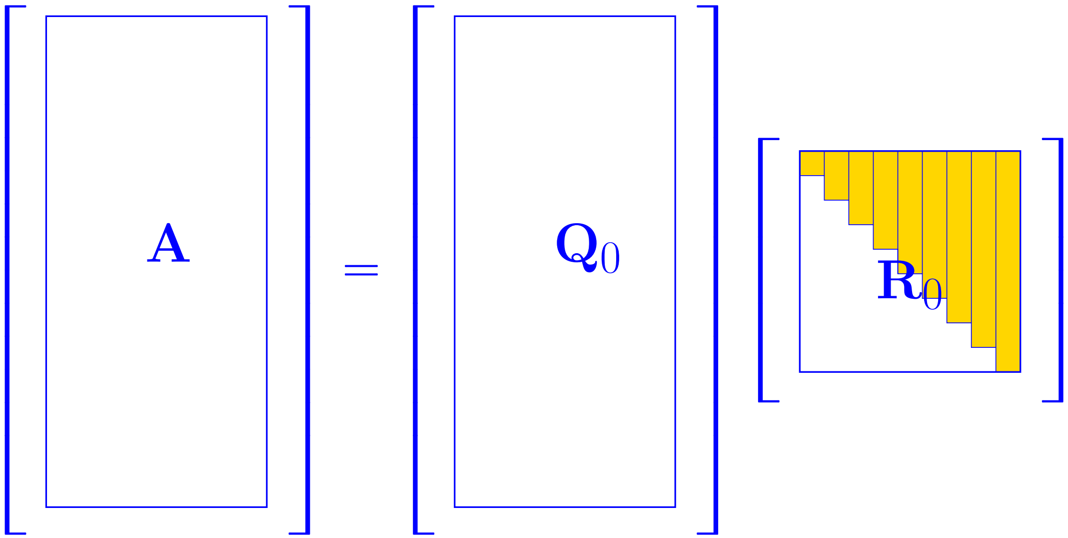
$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{R}_0 \qquad \text{(„sparsame“ QR-Zerlegung)} ,$$

(ii) eine eindeutige *orthogonale Matrix* $\mathbf{Q} \in \mathcal{O}(n)$ *und eine* eindeutige *Matrix* $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n,k}$ *mit* $(\mathbf{R})_{i,j} = 0$ *für* $i > j$ *und* $(\mathbf{R})_{i,i} > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ *so, dass*

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \qquad \text{(volle QR-Zerlegung)} .$$

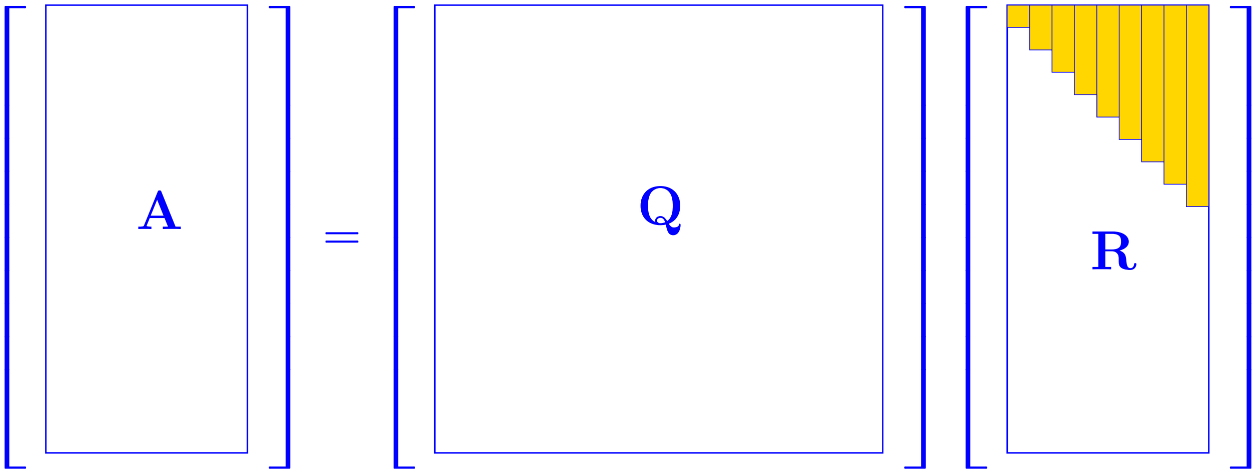
R. Hiptmair
SAM, ETHZ

„sparsame” QR-Zerlegung: $\mathbf{Q}_0^\top \mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}_k$,



$$, \quad \mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{R}_0 \,, \quad \begin{array}{l} \mathbf{Q}_0 \in \mathbb{R}^{n,k} \,, \\ \mathbf{R}_0 \in \mathbb{R}^{k,k} \,, \end{array} \tag{IV.3.4.H}$$

volle QR-Zerlegung: $\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$,



$$, \quad \mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \,, \quad \begin{array}{l} \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n} \,, \\ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n,k} \,, \end{array} \tag{IV.3.4.J}$$

4.3.5 Vektorprodukt

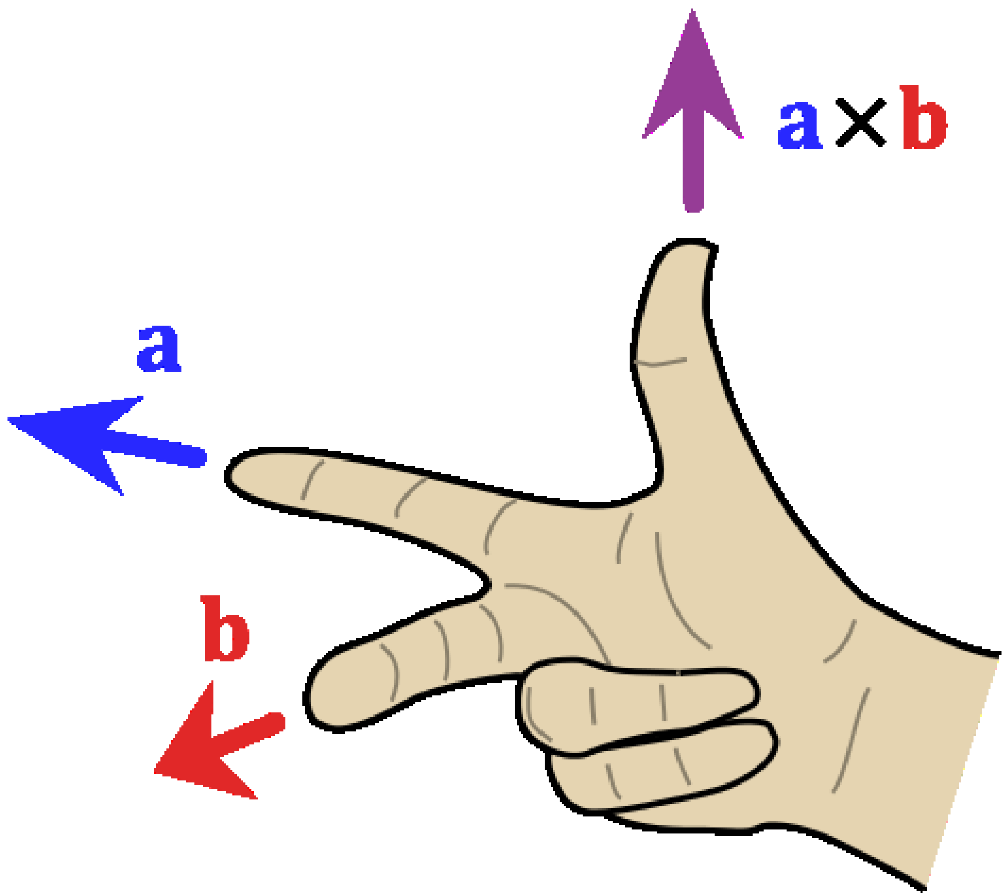
Definition IV.3.5.A (Vektorprodukt)**.**
Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ *ist eine Abbildung* $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definiert durch*

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz IV.3.5.C (Orthogonalität des Vektorprodukts)**.**

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n: \quad \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = 0 \,. \qquad \text{(VP1)}$$



◁ „Rechte-Hand-Regel"

Satz IV.3.5.E (Länge des Vektorprodukts)**.**

$$\forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n: \quad \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \sin \sphericalangle(\mathbf{v},\mathbf{w}) \ . \qquad \text{(VP2)}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz IV.3.5.G (Rechenregeln für das Vektorprodukt).

Für das Vektorprodukt von Definition IV.3.5.A gelten die Rechenregeln:

(i) (Antikommutativität)

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 . \tag{VP3}$$

(ii) (Linearität im ersten Argument)

$$(\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \alpha(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) + \beta(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} . \tag{VP4}$$

(iii) (Linearität im zweiten Argument)

$$\mathbf{u} \times (\alpha \mathbf{v} + \beta \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} . \tag{VP5}$$

(iv) (Dreifaches Vektorprodukt)

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \mathbf{w} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle . \tag{VP6}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

4.4 Lineare Ausgleichsrechnung

4.4.1 Überbestimmte lineare Gleichungssysteme: Beispiele

LINK zu Präsentationsfolien für Abschnitt 4.4.1.

Korollar IV.4.1.A (Existenz von Lösungen überbestimmter lienearer Gleichungssysteme)**.**
Eine Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *mit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m,n}$, *existiert* genau dann, *wenn* $\mathbf{b} \in \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

4.4.2 Kleinste-Quadrate Lösung

Definition IV.4.2.B (Kleinste-Quadrate-Lösung)**.**
$\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ *heisst Kleinste-Quadrate-Lösung (KQL) von* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, *wenn gilt*

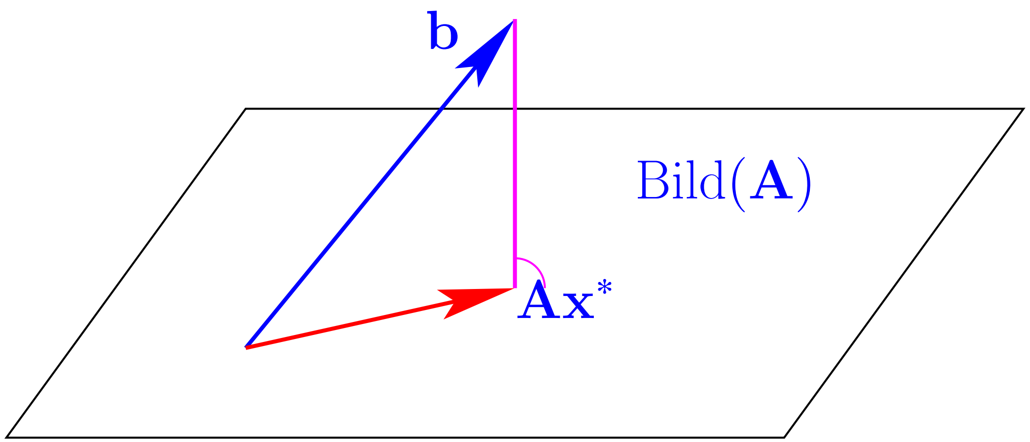
$$\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*\| = \min\{\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \qquad \text{(IV.4.2.C)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{A})_{i,j} (\mathbf{x}^*)_j \right)^2 = \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{A})_{i,j} x_j \right)^2 : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\} ,$$

d.h. die kleinste-Quadrate-Lösung realisiert ein Residuum $\mathbf{r} := \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*$ *mit minimaler Norm.*

4.4.3 Normalengleichungen



Geometrische Perspektive:

$\mathbf{A}\mathbf{x}^*$ ist zu $\mathbf{b}$ nächster Punkt $\in \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

$\mathbf{A}\mathbf{x}^* \mathrel{\hat{=}}$ Orthogonale Projektion of $\mathbf{b}$ auf $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ [Satz IV.2.3.L].

Satz IV.4.3.B (Normalengleichungen)**.**
Jede Kleinste-Quadrate-Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, *erfüllt die Normalengleichungen (NGL)*

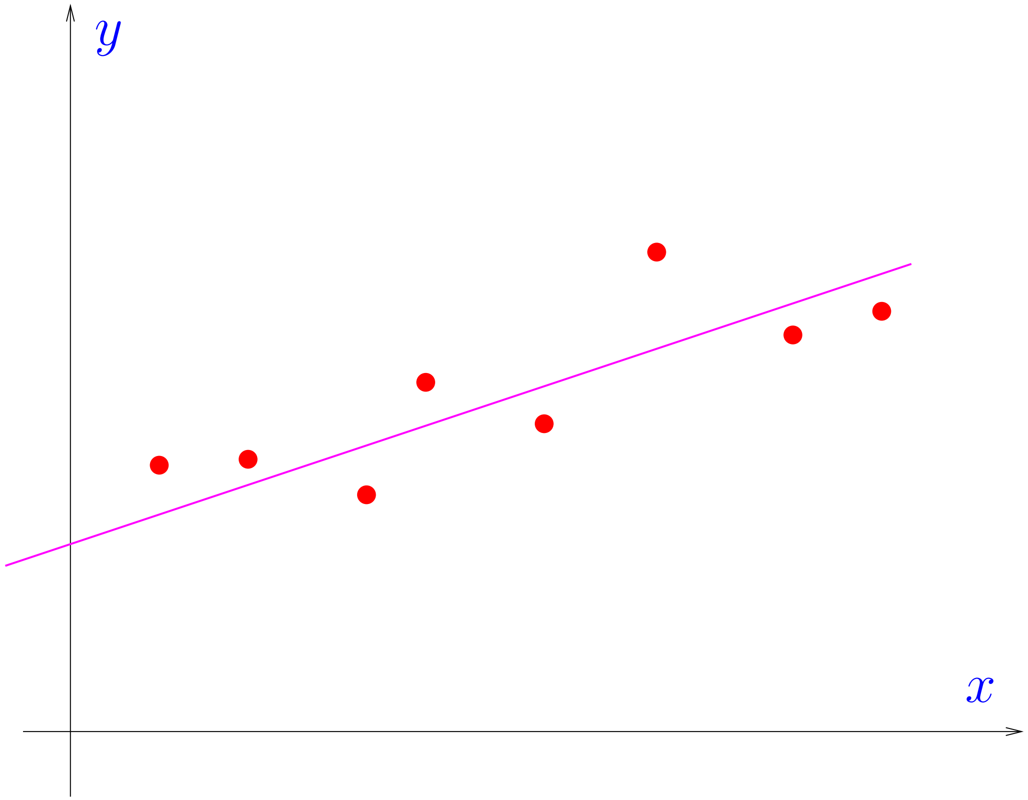
$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b} .$$

Beispiel IV.4.3.D (Lineare Regression)*.*

Gegeben: m Datenpunkte (x_j, y_j), $j = 1, \ldots, m$

Gesucht: „Möglichst gut passende $(*)$" Gerade durch die Datenpunkte

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



Gerade: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \alpha x + \beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.

$(*)$: α,β so, dass

$$\sum_{j=1}^{m} (\alpha x_j + \beta - y_j)^2 \quad \text{minimal.}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Korollar IV.4.3.F (Lösbarkeit der Normalengleichungen, vgl. Lemma IV.2.3.K)**.**
Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gilt*

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) \ .$$

Ist insbesondere $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$*, dann ist* $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ *invertierbar.*

4.4.4 Orthogonalisierungstechniken

QR-Zerlegung von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ (→ Satz IV.3.4.F): $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m,m}$ orthogonal, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ($n < m$, $\operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = n$)

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{c}\| \;, \quad \mathbf{c} := \mathbf{Q}^\top \mathbf{b} \;.$$

$$\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{c} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \\ n \\ m \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \hline \mathbf{O} \end{bmatrix}_{n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ \hline c_{n+1} \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \hline -c_{n+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{bmatrix} \;, \quad \mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ invertierbar} \;.$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

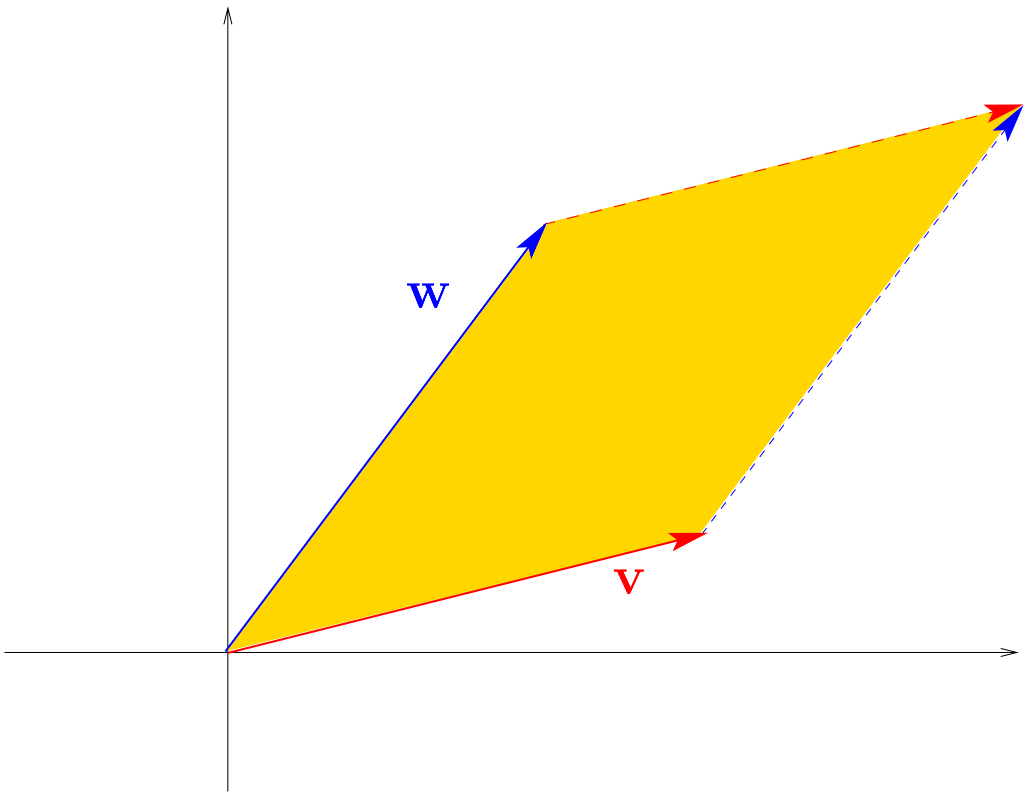
- Die Wahl von $\mathbf{x}$ kann die letzten $m-n$ Komponenten von $\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{c}$ nicht beeinflussen, kann jedoch so getroffen werden, dass die ersten n Komponenten zu Null werden.

Ein solches $\mathbf{x}$ minimiert dann $\|\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{c}\|$ und ist gegeben durch $\mathbf{x} = \mathbf{R}_1^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ **!**

Satz IV.4.4.B (Kleinste-Quadrate-Lösung durch QR-Zerlegung)**.**
Sei $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ *die (volle) QR-Zerlegung von* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gemäss Satz IV.3.4.F, mit* $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$*, wobei* $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \hline \mathbf{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *mit* $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{n,n}$ *und* $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1\ \mathbf{Q}_2]$*,* $\mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{m,n}$*.*
Dann ist die kleinste-Quadrate-Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$*,* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$*, gegeben durch* $\mathbf{x}^* = \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{Q}_1^\top \mathbf{b}$*.*

4.5 Volumenformen und Determinanten

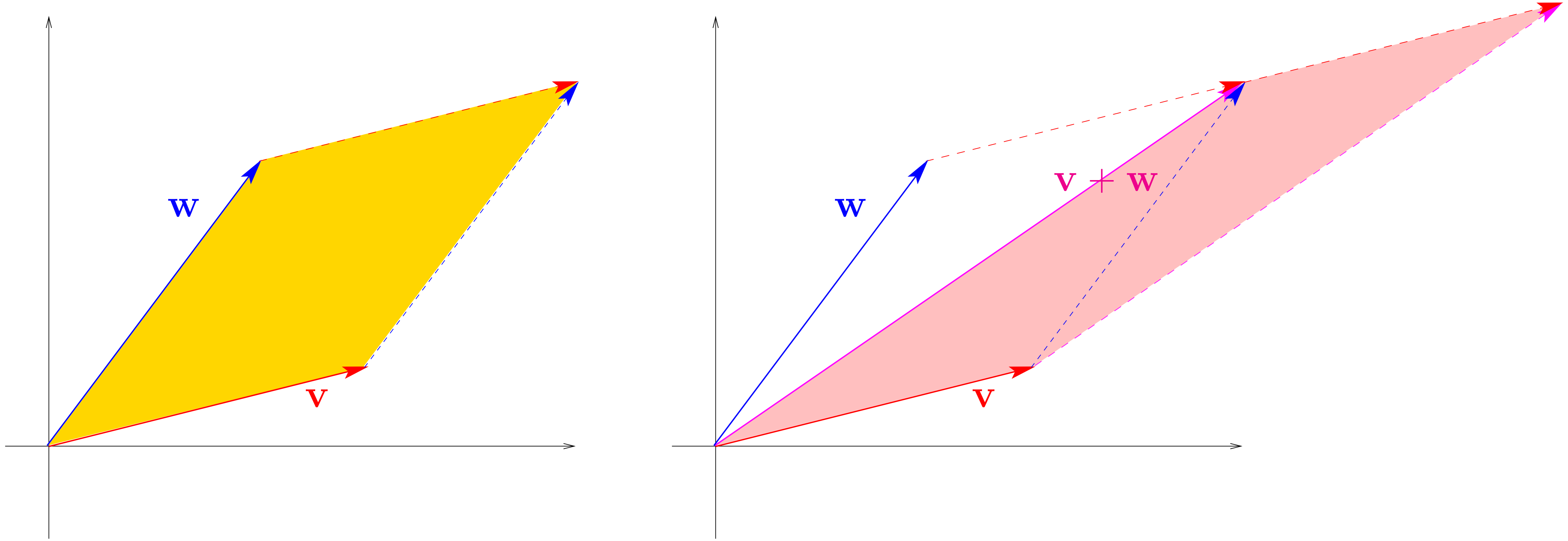
4.5.1 Volumen



◁ Von $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ aufgespanntes Parallelogramm.

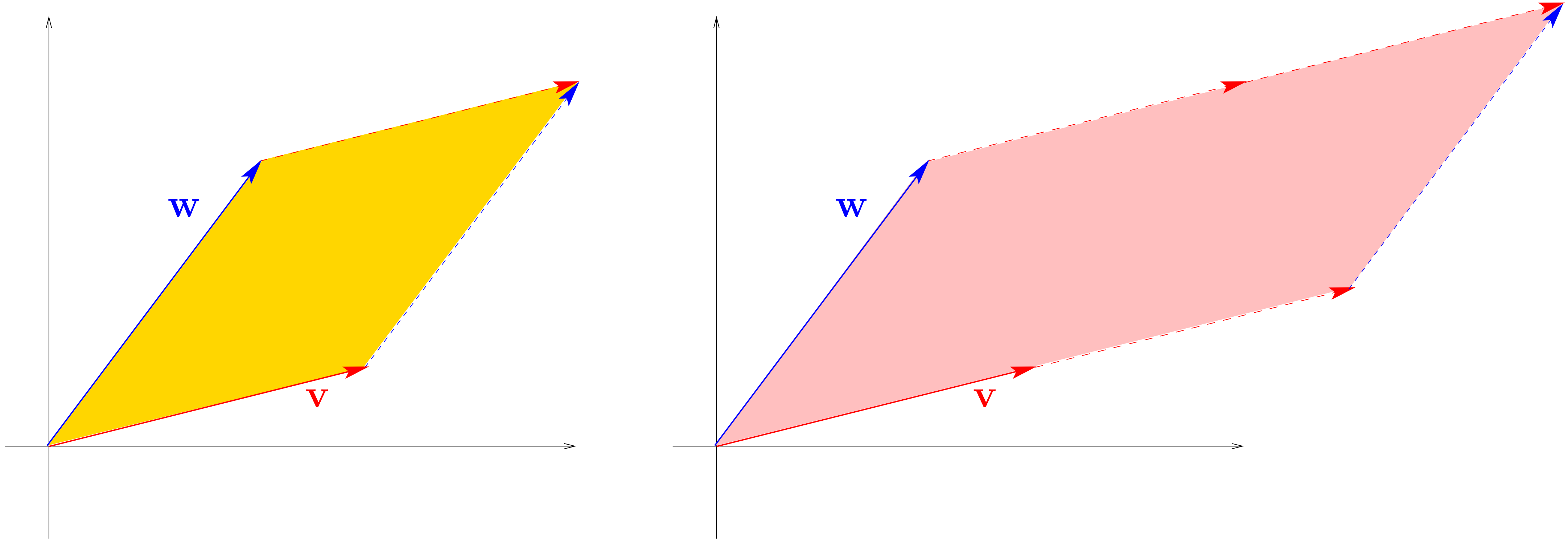
$$/\!\!/(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



Gleiche Flächen!

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



Doppelte Fläche!

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Eigenschaften des Flächenmasses (**=** 2-dimensionales Volumen)

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\right) &= 1\ , \\ \mathrm{vol}(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \mathrm{vol}(\mathbf{w},\mathbf{v})\ , \\ \mathrm{vol}(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \mathrm{vol}(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{w})\ , \\ \mathrm{vol}(\alpha\mathbf{v},\mathbf{w}) &= |\alpha|\,\mathrm{vol}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \end{aligned} \qquad \forall \mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^2 \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}\ . \tag{IV.5.1.V}$$

▶ $\mathrm{vol}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ linear unabhängig

Allgemein in $\mathbb{R}^n$:

Begriff IV.5.1.A (Volumen)**.**
Ein sinnvolles Volumen (eines Parallelepipeds) in $\mathbb{R}^n$ *ist eine Abbildung (Funktion),*

$$\mathrm{vol} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ Vektoren}} \to \mathbb{R}_0^+ \ ,$$

die erfüllen muss

(i) $\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$ *(*$\mathbf{e}_\ell \mathrel{\hat{=}} l.$ *Einheitsvektor)*

(ii) $\mathrm{vol}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^j, \ldots, \mathbf{v}^k, \ldots, \mathbf{v}^n) = \mathrm{vol}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^j + \mathbf{v}^k, \ldots, \mathbf{v}^k, \ldots, \mathbf{v}^n)$
für alle $\mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^n$, $k, j \in \{1, \ldots, n\}$, $k \neq j$,

(iii) $\mathrm{vol}(\mathbf{v}^1, \ldots, \alpha\mathbf{v}^j, \ldots, \mathbf{v}^n) = |\alpha| \, \mathrm{vol}(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^j, \ldots, \mathbf{v}^n)$
für alle $\mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

4.5.2 Determinanten

Definition IV.5.2.A (Determinantenform)**.**
Eine Determinantenform auf $\mathbb{R}^n$ *ist eine (multilineare) Abbildung*

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ Mal}} \to \mathbb{R} ,$$

(d.h. $\det$ *nimmt* n *verschiedene Spaltenvektoren als Argumente) für die gilt*

(i) $\det \neq 0$*, das heisst es gibt Vektoren* $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ *so, dass* $\det(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n) \neq 0$*.*

(ii) $\det(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^j + \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}^n) = \det(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^j, \ldots, \mathbf{v}^n) + \det(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}^n)$
für alle $\mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^n$*,* $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$*,* $j \in \{1, \ldots, n\}$

(iii) $\det(\mathbf{v}^1, \ldots, \alpha \cdot \mathbf{v}^j, \ldots, \mathbf{v}^n) = \alpha \cdot \det(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^j, \ldots, \mathbf{v}^n)$
für alle $\mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^n$*,* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $j \in \{1, \ldots, n\}$*,*

(iv) $\det(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^j, \ldots, \mathbf{v}^k, \ldots, \mathbf{v}^n) = \det(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^j + \mathbf{v}^k, \ldots, \mathbf{v}^k, \ldots, \mathbf{v}^n)$
für alle $\mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^n$*,* $k, j \in \{1, \ldots, n\}$*,* $k \neq j$*,*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Zu (i) sagt man „$\det$ ist nichttrivial”
Zu (ii), (iii) sagt man „$\det$ ist linear in jedem Argument” oder „multilinear”

Korollar IV.5.2.X (Linearität der Determinante in jedem Argument)**.**
Eine Determinante auf $\mathbb{R}^n$ *erfüllt für jedes* $k \in \{1,\dots,n\}$, $m \in \mathbb{N}$

$$\det(\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^{k-1},\sum_{\ell=1}^{m}\gamma_\ell\mathbf{v}^\ell,\mathbf{w}^{k+1},\dots,\mathbf{w}^n) = \sum_{\ell=1}^{m}\gamma_\ell \det(\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^{k-1},\mathbf{v}^\ell,\mathbf{w}^{k+1},\dots,\mathbf{w}^n)\ ,$$

für beliebige Spaltenvektoren $\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^n,\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^m \in \mathbb{R}^n$ *und* $\gamma_\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \in \{1,\dots,m\}$

Satz IV.5.2.B (Invarianzeigenschaft von Determinanten)**.**
Eine Determinante auf $\mathbb{R}^n$ *erfüllt für jedes* $k,i \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq k$,

$$\det(\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^{k-1},\mathbf{w}^k+\alpha\mathbf{w}^i,\mathbf{w}^{k+1},\dots,\mathbf{w}^n) = \det(\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^{k-1},\mathbf{w}^k,\mathbf{w}^{k+1},\dots,\mathbf{w}^n)$$

für beliebige Spaltenvektoren $\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^n \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Korollar IV.5.2.C.
Beim Vertauschen zweier *Argumente einer Determinante wechselt deren Vorzeichen.*

Für uns das wichtigste Resultat: Determinanten als “Sonden für lineare Abhängigkeit”

Satz IV.5.2.D (Determinante linear abhängiger Vektoren)**.**
Für beliebige Vektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\} \quad \textit{linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n) \neq 0 \; .$$

4.5.3 Determinantenformeln

Satz IV.5.3.E (Eindeutigkeit der Determinante)**.**
Ist $\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\}$ *eine Basis des* $\mathbb{R}^n$*, so ist eine Determinante* $\det$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *bereits* eindeutig *durch den Wert* $\det(\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n)$ *festgelegt.*

Definition IV.5.3.F ((Standard)determinante im n dimensionalen Raum)**.**
Die (Standard-)Determinante auf $\mathbb{R}^n$ ist die Determinante mit

$$\det\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\ \\ \\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\ \\ \\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\ \\ \\\vdots\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\vdots\\ \\ \\ \\\vdots\\1\end{pmatrix}\right) = 1\,.$$

Volumen des von $\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelepipeds im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{vol}(\,/\!\!/(\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^n)) := \left|\det(\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^n)\right|\ .$$

Definition IV.5.3.G (Determinante einer quadratischen Matrix)**.**
Die Determinante einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, in Zeichen $\det(\mathbf{A})$, ist die Determinante ihrer Spalten, aufgefasst als Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

Formel für $\mathbf{A} = \left[\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n\right] \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\mathbf{a}^j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\mathbf{e}_i \;, \quad a_{i,j} := (\mathbf{A})_{i,j} \;, \quad i,j \in \{1,\dots,n\} \;.$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= \det(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n) \\
&= \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}\mathbf{e}_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \det(a_{i_1,1}\mathbf{e}_{i_1}, \dots, a_{i_n,n}\mathbf{e}_{i_n}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdot \cdots \cdot a_{i_n,n} \; \det(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_n}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdot \cdots \cdot a_{i_n,n} \; \underbrace{\sigma(i_1, \dots, i_n)}_{\in\{-1,0,+1\}} \; \underbrace{\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)}_{=1} \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \underbrace{a_{i_1,1} \cdot \cdots \cdot a_{i_n,n}}_{n\text{-faches Produkt}} \; \sigma(i_1, \dots, i_n)
\end{aligned}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

• $n = 2$:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}\right) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2} \;.$$

• $n = 3$ (Regel vom Sarrus)

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}\right)$$
$$= a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,3}a_{3,2}a_{1,1} - a_{3,3}a_{1,2}a_{2,1} \;.$$

Determinante von Blockstufenmatrizen:

$$\det\left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{array}\right]\right) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{C}) \;, \quad \begin{array}{l} \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k,k},\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,m}, \\ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m,m},\ \mathbf{O} \mathrel{\hat=} \text{Nullmatrix} \;. \end{array} \qquad \text{(IV.5.3.L)}$$

Lemma IV.5.3.H (Determinante der transponierten Matrix)**.**
Für alle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gilt:* $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top)$

Satz IV.5.3.I (Determinante als Sonde für Invertierbarkeit)**.**
Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *ist* genau dann invertierbar*, wenn* $\det(\mathbf{A}) \neq 0$*.*

4.5.4 Determinante und Matrixprodukt

Satz IV.5.4.J (Determinantenmultiplikationssatz)**.**
Für beliebige Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gilt*

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \; .$$

Bemerkung IV.5.4.K (Algorithmus zur Berechnung von Determinanten).

Determinantenberechnung mittels Gram-Schmidt-Orthonormalisierung von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, siehe Unterabschnitt 4.3.4

❶ Falls Abbruch $\Rightarrow$ Spalten von $\mathbf{A}$ linear abhängig $\Rightarrow$ $\det(\mathbf{A}) = 0$

❷ Sonst QR-Zerlegung von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ (→ Satz IV.3.4.F)

$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal , $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n,n}$ obere Dreiecksmatrix.

$$\blacktriangleright \quad \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{Q}) \cdot \det(\mathbf{R}) = \pm(\mathbf{R})_{1,1} \cdot \dots \cdot (\mathbf{R})_{n,n} \,.$$

$\triangle$

Clickerfragen

Clickerfrage 4.5.1 (Orthogonalität).

Für die folgenden Aussagen ist jeweils zu entscheiden, ob Sie wahr oder falsch sind:

(i) Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) + \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$

(ii) Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, so gilt $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})^\perp = \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

(iii) Für jede symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) + \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.

(iv) Für jede symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{O} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{O} \; .$$

(v) Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$\left(\mathrm{Bild}(\mathbf{A})^\perp\right)^\perp = \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) \; .$$

(vi) Für jede Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ ist das orthogonale Komplement

$$\mathcal{M}^\perp := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \colon \langle \mathbf{v}, \mathbf{m} \rangle = 0 \; \forall \mathbf{m} \in \mathcal{M}\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Clickerfrage 4.5.2 (Eigenschaften der Flächenfunktion).

Es bezeichne $\mathrm{vol} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ ($\mathbb{R}_0^+ := \{\xi \in \mathbb{R} : \xi \geqslant 0\}$) die Funktion, die zwei Vektoren die *Fläche* des von ihnen aufgespannten Parallelogramms zuordnet.

Welche der folgenden Rechenregeln gelten für alle Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$?

(i) $\mathrm{vol}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathrm{vol}(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

(ii) $\mathrm{vol}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2$

(iii) $\mathrm{vol}(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha\,\mathrm{vol}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

(iv) $\mathrm{vol}(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{w}) = \mathrm{vol}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

(v) $\mathrm{vol}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ ($\mathbf{e}_i \,\hat{=}\, i$. Einheitsvektor)

(vi) $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\mathrm{vol}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$

Clickerfrage 4.5.3 (Determinante von Einheitsvektoren).

Es bezeichnet $\det$ die Standardeterminante in $\mathbb{R}^n$, und $\mathbf{e}_i$ den i. Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$.

Welchen Wert hat

$$\det(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n-1}, \dots, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)\ ?$$

(i) 1, wenn n gerade, sonst -1

(ii) 1 in jedem Fall

(iii)

$$\begin{cases} 1 & \text{, wenn } n \text{ durch } 4 \text{ teilbar,} \\ -1 & \text{, wenn } n \text{ gerade, aber nicht durch } 4 \text{ teilbar,} \\ 1 & \text{, wenn } n \text{ ungerade und } (n-1)/2 \text{ gerade,} \\ -1 & \text{, wenn } n \text{ und } (n-1)/2 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(iv)

$$\begin{cases} 1 & \text{, wenn } n \text{ durch } 4 \text{ teilbar,} \\ -1 & \text{, wenn } n \text{ gerade, aber nicht durch } 4 \text{ teilbar,} \\ -1 & \text{, wenn } n \text{ ungerade und } (n-1)/2 \text{ gerade,} \\ 1 & \text{, wenn } n \text{ ungerade und } (n-1)/2 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Clickerfrage 4.5.4 (Determinante der zweifachen Matrix).

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Welche Aussage ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ richtig?

(i) $\det(2\mathbf{A}) = 2\det(\mathbf{A})$

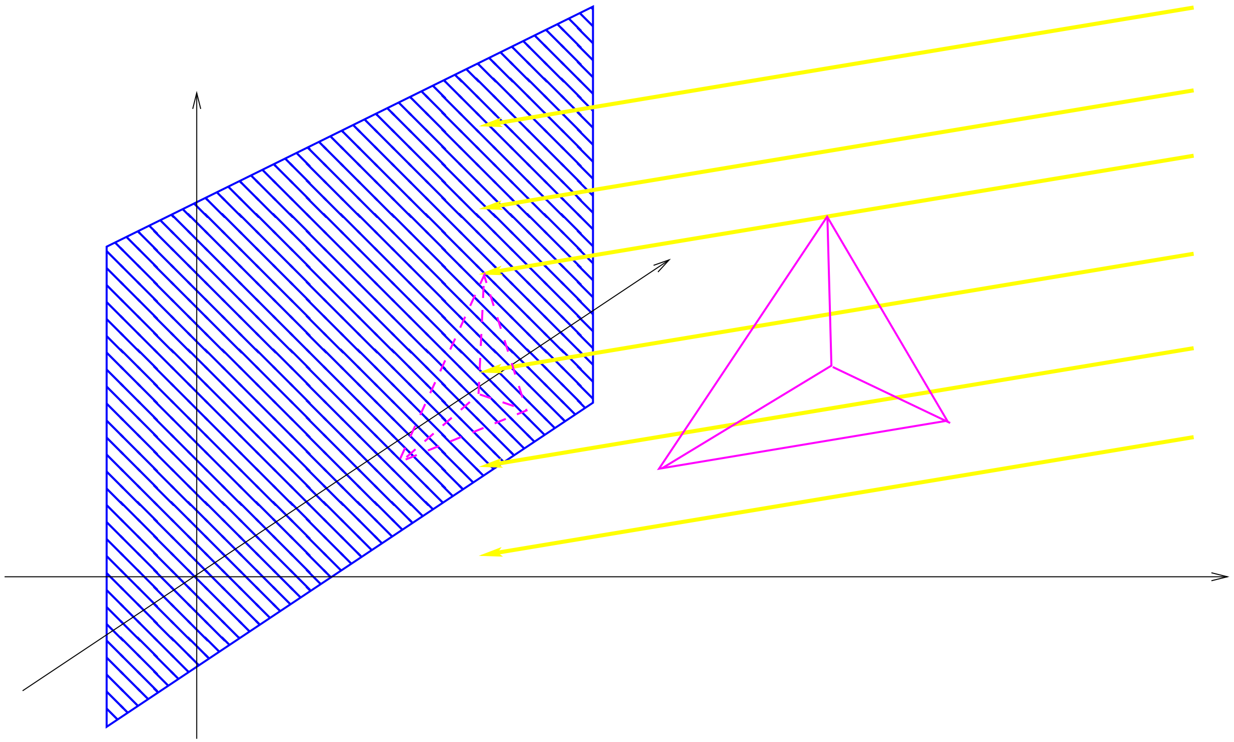
(ii) $\det(2\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} + \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$

(iii) $\det(2\mathbf{A}) = 2^n \det(\mathbf{A})$

(iv) $\det(2\mathbf{A}) = (-1)^n 2^n \det(\mathbf{A})$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

5 Lineare Abbildungen



Computergraphik:

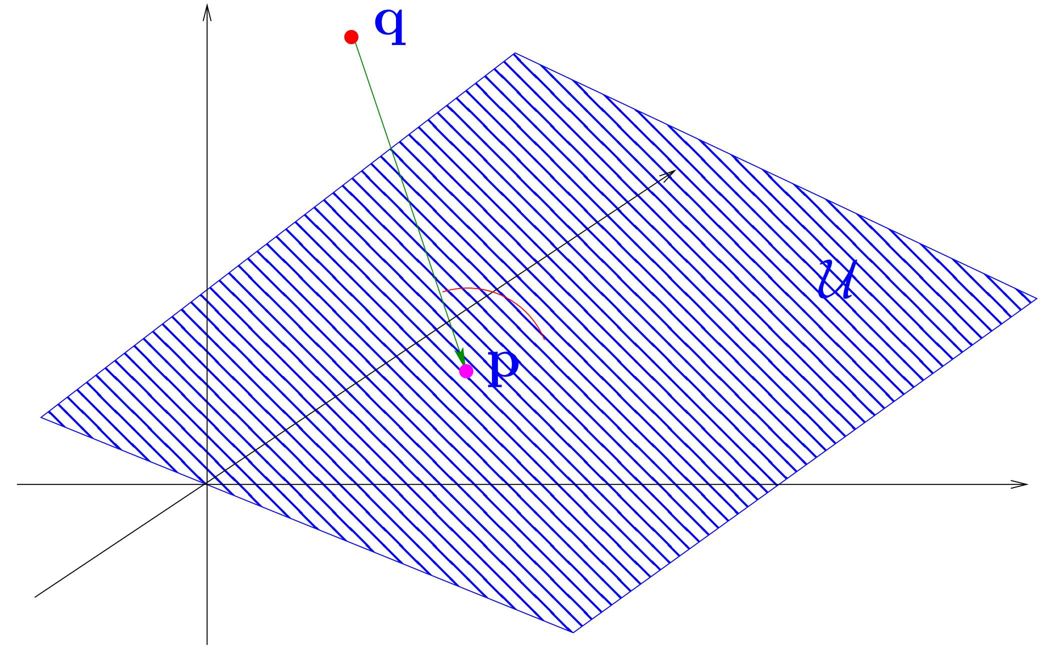
Projektion auf Bildebene

Punkte im Raum $\longmapsto$ Punkte in der Ebene

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Orthogonale Projektion auf Unterraum $\mathcal{U}$:
(→ Abschnitt 4.2.3)

Abbildung $\mathbf{q} \in \mathcal{V} \mapsto \mathbf{p} \in \mathcal{U}$



Listing 5.1: Animation eines rotierenden Tetraeders

```
% MATLAB visualization of the projection of a rotating tetrahedron
% axis of rotation
a = [1;1;2];
% Planar rotation matrix parameterized by rotation angle and implemented as
% a MATLAB function handle
D = @(phi) [ cos(phi), -sin(phi); sin(phi) , cos(phi)];
% Corner points of tetrahedron
T = [0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
% Compute parameterized transformation matrix for rotation, see rotmatrix.m for
    dertails
[Q,R] = qr(a); M = @(phi) Q*[[1 0 0];[0;0] D(phi)]*Q';

figure('name','rotating tetrahedron');
% Main loop for rotating the tetrahedron
for phi=0:pi/180:(2*pi)
  Tmap = M(phi)*T;
  cla; axis([-1 1.5 -1 1.5]); hold on;
```

```
  for j=2:4
    for k=1:j-1
      plot([Tmap(1,j),Tmap(1,k)],[Tmap(2,j),Tmap(2,k)],'m-');
    end
  end
  drawnow; hold off;
end
```


Wie in Kapitel 3:

✎ Notation: $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{U} \hat{=}$ Menge („Räume”) aller Matrizen einer bestimmten Grösse, (Grösse fest, aber oft nicht eigens spezifiziert)

Spezialfälle: Räume von Spaltenvektoren/Zeilenvektoren ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$)

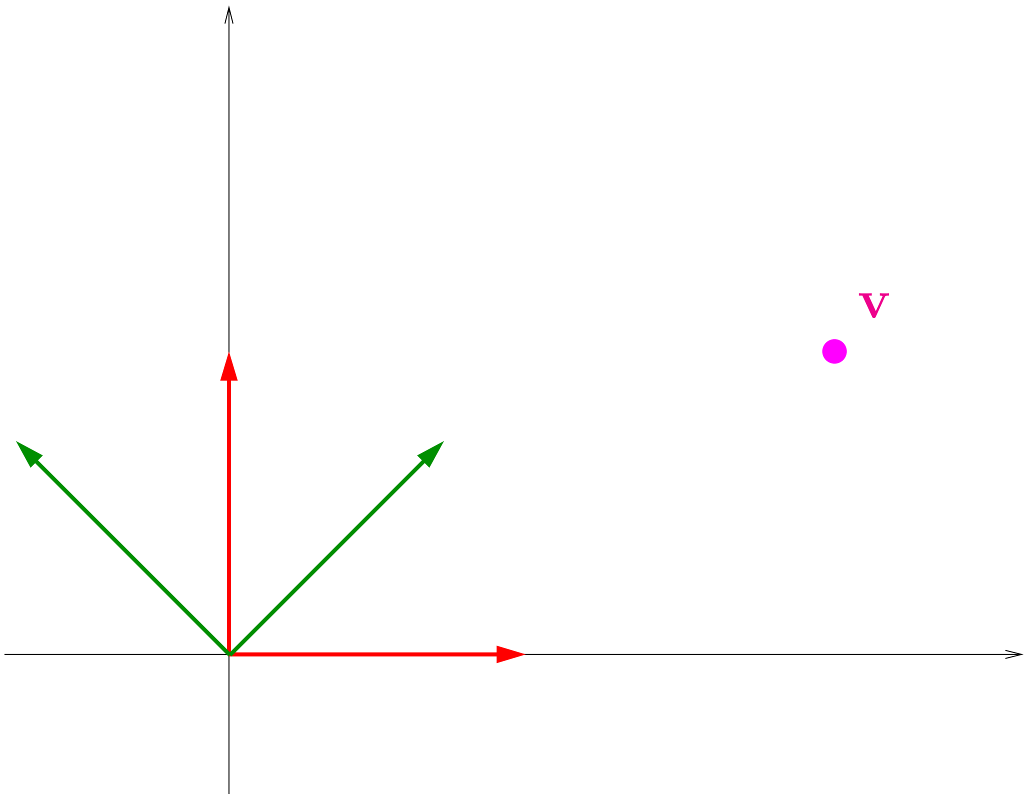
Sprachgebrauch: Elemente von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ werden als “Vektoren” bezeichnet, auch wenn es sich vielleicht um Matrizen handelt.

5.1 Wiederholung: Vektoren und Koordinaten

Erinnerung an Abschnitt 3.4:

Nach Wahl einer Basis: Vektor $\in \mathcal{V}$ $\longleftrightarrow$ Koordinatenvektor $\in \mathbb{R}^n$, $n := \dim \mathcal{V}$
(ein Spaltenvektor, basisabhängig!)

Unterscheide: Vektor (Punkt, Kraftvektor, etc.) $\neq$ Koordinatenvektor



„rote Basis": $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

„güne Basis": $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$

Koordinatenvektoren des Punktes/Vektors $\mathbf{v}$:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition V.1.0.A (Koordinatenabbildung)**.**
Sei $\dim \mathcal{V} = n$ *und* $\mathfrak{B}_V := \{\mathbf{b}^1, \ldots \mathbf{b}^n\}$ *eine Basis von* $\mathcal{V}$*. Dann heisst die Abbildung*

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V} : \begin{cases} \mathcal{V} & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{v} & \mapsto \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{so, dass} \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{b}^j$$

die Koordinatenabbildung/Koeffizientenabbildung zur Basis $\mathfrak{B}_V$*.*

Korollar III.4.0.B $\Rightarrow$ Koordinatenabbildungen sind umkehrbar (bijektiv)

Erinnerung an Satz III.4.0.H ➥ Transformation von Koordinatenvektoren bei Basiswechsel

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

5.2 Konzept der linearen Abbildung

Definition V.2.0.A (Lineare Abbildung)**.**
*Eine Abbildung (Funktion, siehe [**?**, Abschnitt 2.1])* $\mathsf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *ist linear, falls*

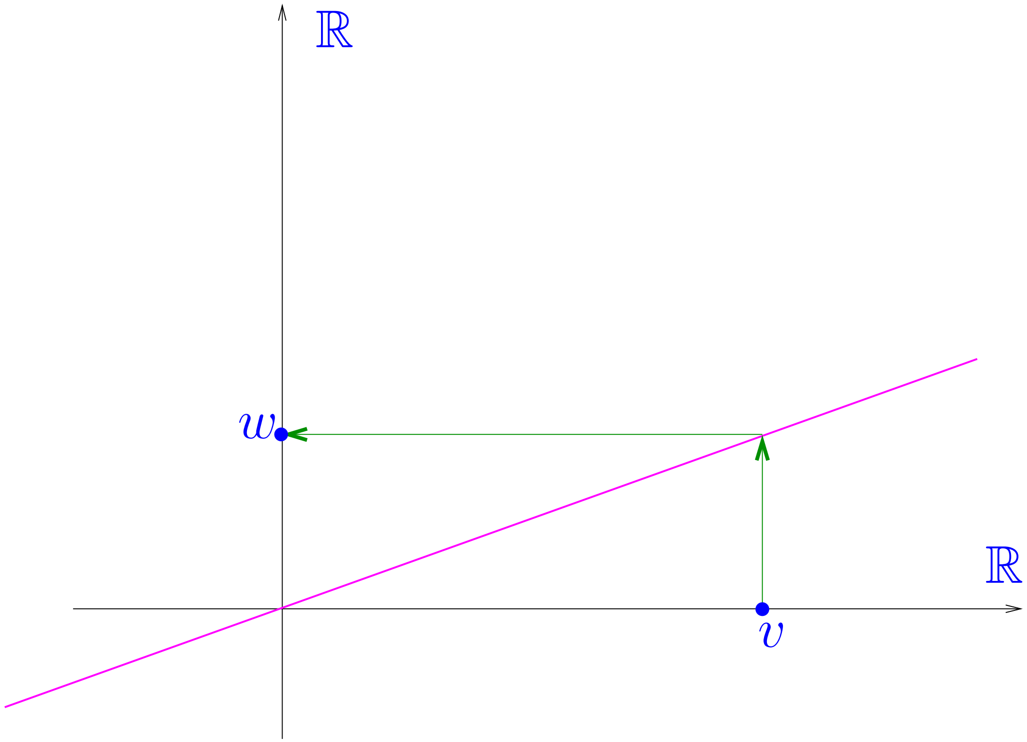
$$\mathsf{L}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathsf{L}(\mathbf{x}) + \mathsf{L}(\mathbf{y}) \quad \textit{für alle} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \,, \tag{L1}$$

$$\mathsf{L}(\alpha \mathbf{v}) = \alpha \mathsf{L}(\mathbf{v}) \quad \textit{für alle} \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \ \alpha \in \mathbb{R} \,. \tag{L2}$$

Notation: $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \hat{=}$ Menge der linearen Abbildungen $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Beispiel V.2.0.B (Lineare Abbildung vom n dimensionalen Raum auf sich selbst).



$$\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R},\ \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = 1$$

$\lhd$ Funktionsgraph einer linearen Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Gerade durch 0 („lineare Funktion")

$$w = \gamma v \ , \quad \gamma \in \mathbb{R} \ .$$

◇

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Beispiel V.2.0.C („Standardbeispiel" für lineare Abbildung).

Für

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^n \quad , \quad \mathcal{W} = \mathbb{R}^m \ ,$$

und eine *gegebene* Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ definiert

$$\mathsf{L}_{\mathbf{A}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{A}\mathbf{x} \end{array} \right.$$

eine lineare Abbildung.

◇

Beispiel V.2.0.D (Koordinatenabbildung als lineare Abbildung).

Ist $\dim \mathcal{V} = n$ und $\mathfrak{B}_V$ eine Basis von $\mathcal{V}$, so ist die zugeordnete Koordinatenabbildung $\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}$ eine bijektive (eineindeutige, umkehrbare) lineare Abbildung zwischen $\mathcal{V}$ und $\mathbb{R}^n$!

Klar:
$$\begin{aligned} \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathbf{v}) + \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathbf{w}) && \forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathcal{V}\,, \\ \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\alpha\mathbf{v}) &= \alpha\,\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathbf{v}) && \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}\,,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

linke Seite („Vektorseite”):	rechte Seite („Koordinatenseite”):
Rechenoperationen in $\mathcal{V}$	Vektorkalkül in $\mathbb{R}^n$

◇

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

► Lineare Abbildungen vertauschen mit der Bildung von Linearkombinationen:

$$\mathsf{L}\Big(\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{v}^j\Big) = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathsf{L}(\mathbf{v}^j) \quad \text{für } \mathbf{v}^j \in \mathcal{V},\, c_j \in \mathbb{R}\,. \tag{V.2.0.E}$$

Abbildungseigenschaften

Aus (V.2.0.E) ergeben sich spezielle Abbildungseigenschaften:

Notation: Bildmenge: für $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ und $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ setze

$$\mathsf{L}(\mathcal{M}) := \{\mathbf{w} \in \mathcal{W} \colon \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V} \text{ so, dass } \mathsf{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \subset \mathcal{W} \; .$$

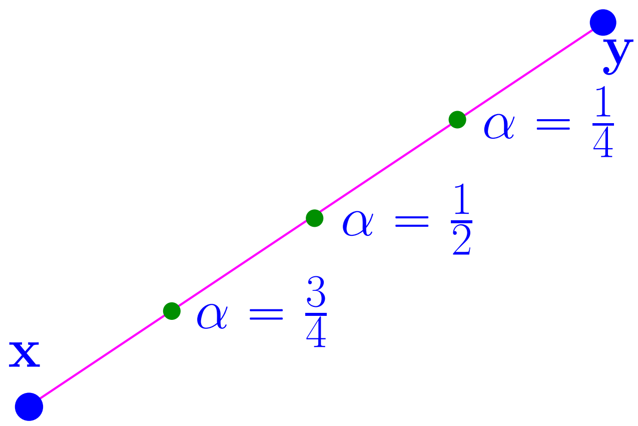
Satz V.2.0.L (Abbildungseigenschaften linearer Abbildungen)**.**
Sei $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *eine lineare Abbildung zwischen* $\mathcal{V}$ *und* $\mathcal{W}$*. Dann gilt*

(i) *Ist* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *ein* Unterraum *(→ Definition III.1.0.C) von* $\mathcal{V}$*, so ist* $\mathsf{L}(\mathcal{U})$ *ein* Unterraum *von* $\mathcal{W}$*.*

(ii) *Ist* $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ *ein* affiner Teilraum *(→ Definition III.1.0.J) von* $\mathcal{V}$*, so ist* $\mathsf{L}(\mathcal{A})$ *ein* affiner Teilraum *von* $\mathcal{W}$*.*

Anschauung: Lineare Abbildungen bilden Geraden/Ebenen auf Punktre/Geraden/Ebenen ab.

Eine spezielle Abbildungseigenschaft:



Definition V.2.0.M (Verbindungsstrecke).
Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ *heisst die Menge*

$$[\![\mathbf{x}, \mathbf{y}]\!] := \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \colon \exists \alpha \in [0,1] \colon \mathbf{v} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}\} \subset \mathcal{V}$$

die Verbindungsstrecke von $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$.

Korollar V.2.0.P („Verbindungsstrecke auf Verbindungsstrecke”).
Jede lineare Abbildung $\mathsf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *bildet die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Vektoren* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ *auf die Verbindungsstrecke ihrer Bildvektoren ab:*

$$\mathsf{L}([\![\mathbf{x}, \mathbf{y}]\!]) = [\![\mathsf{L}(\mathbf{x}), \mathsf{L}(\mathbf{y})]\!] \ .$$

► Visualisierung linearer Abbildungen $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$, in 2D:

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

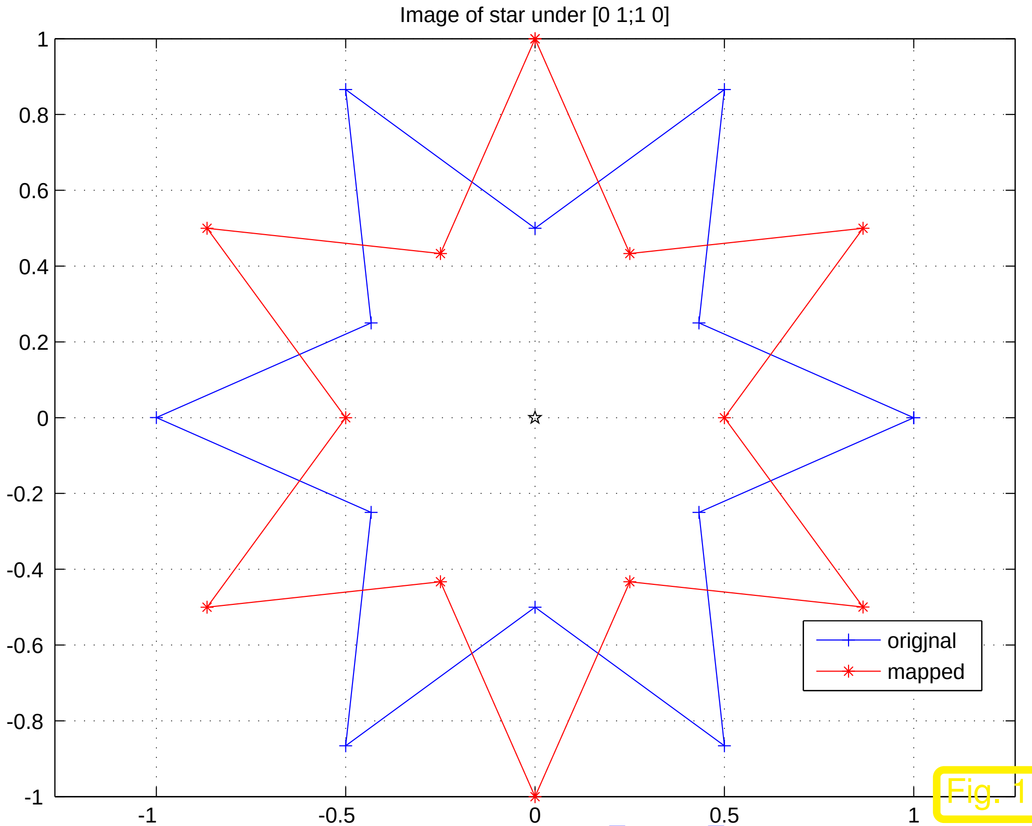


Abb. 5: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

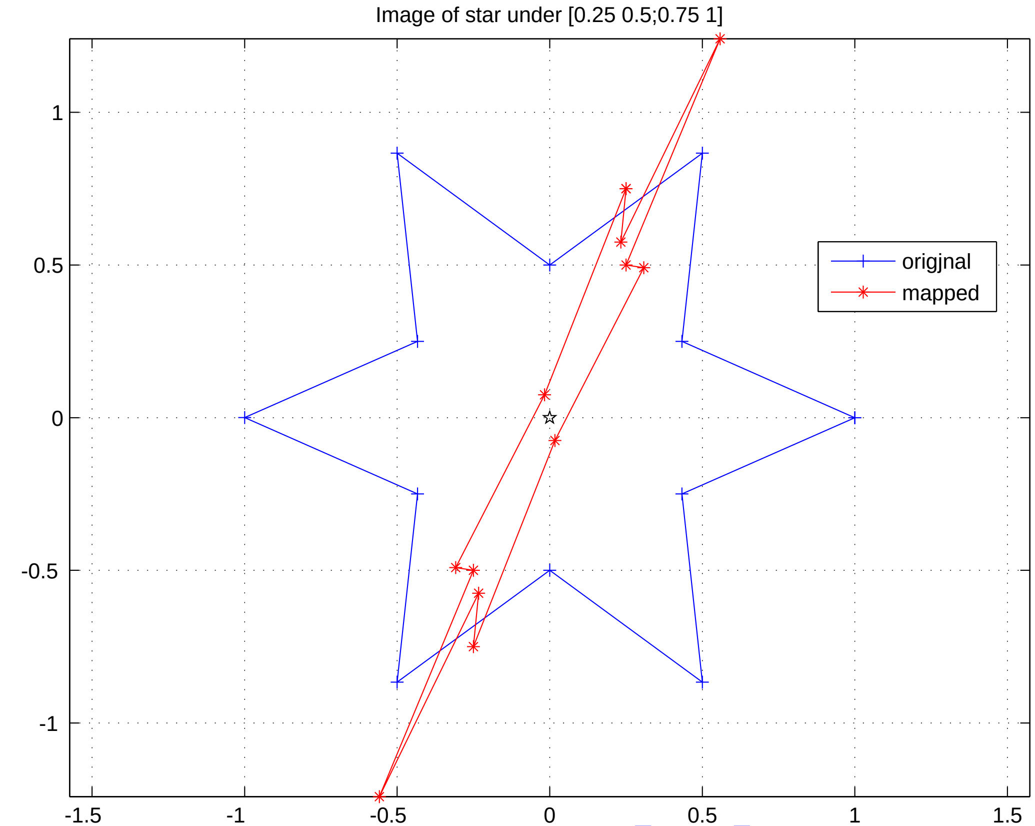


Abb. 6: $\mathbf{A} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

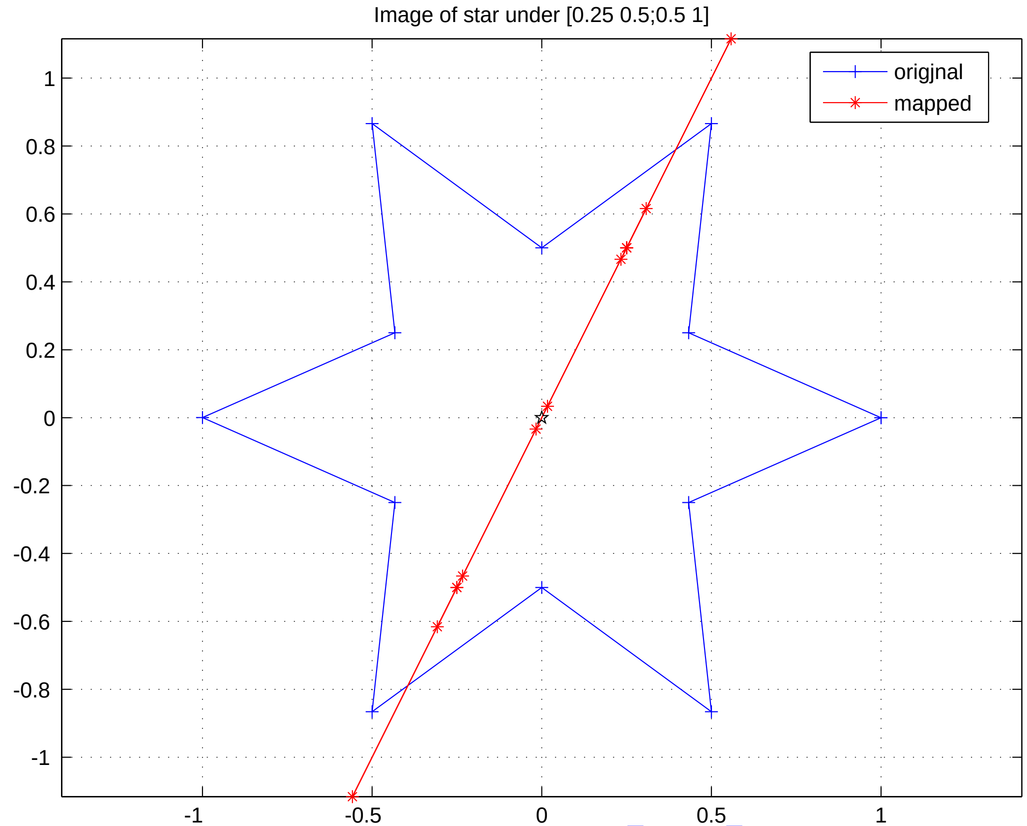


Abb. 7: $\mathbf{A} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

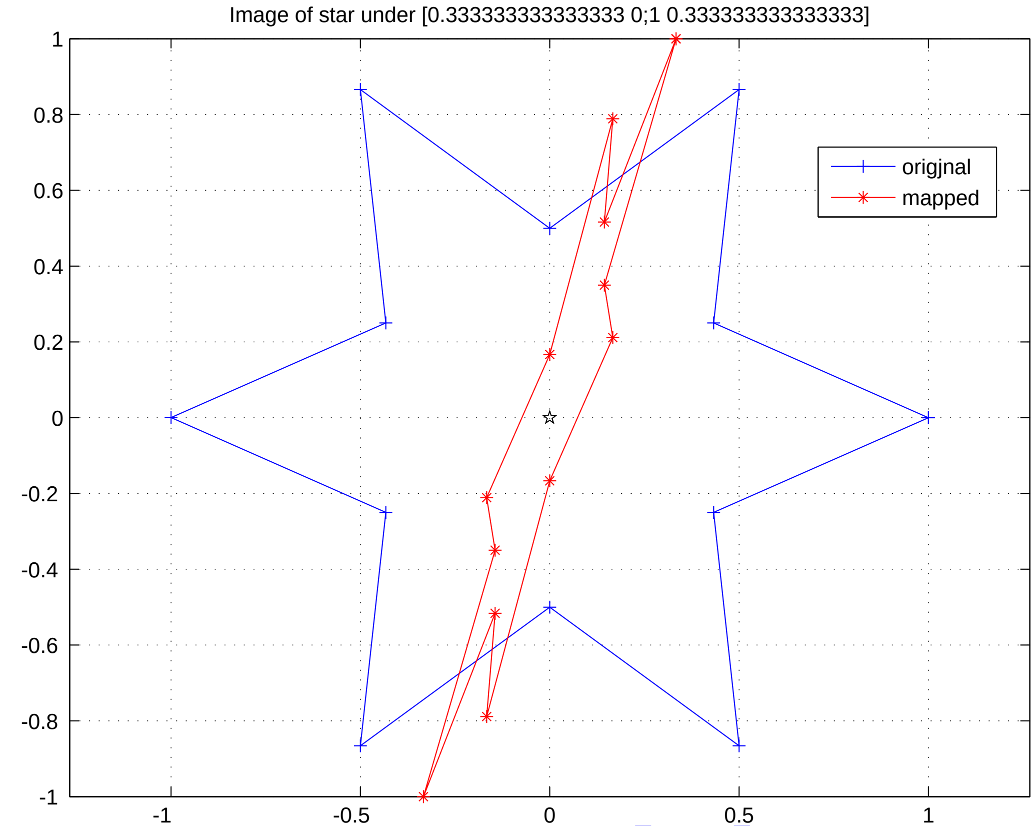


Abb. 8: $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Listing 5.2: Visualisierung linearer Abbildungen in 2D

```
function linmapvis(A)
% Visualizes the action of the linear mapping described by matrix A by applyung
% it to a star.

% Create a 2×13-matrix x whose columns contain the coordinates of the
% vertices of the star
x_outer = [cos(2*pi*(0:6)/6);sin(2*pi*(0:6)/6)];
x_inner = 0.5*[cos(2*pi*(0:5)/6+pi/6);sin(2*pi*(0:5)/6+pi/6)];
x = zeros(2,13); x(:,1:2:13) = x_outer; x(:,2:2:12) = x_inner;

```

```
% Map the star
y = A*x;

% Plot the original star and its image under A
figure('name','image of star');
plot(x(1,:),x(2,:),'b-+',y(1,:),y(2,:),'r-*',[0],[0],'kp'); hold on;
legend('origjnal','mapped','location','best'); grid on;
axis equal; title(['Image of star under ' mat2str(A)]);
```

Komposition

Erinnerung: Hintereinanderausführung/Verkettung/Komposition von Abbildungen:

$$\begin{array}{l} \mathsf{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}\,, \\ \mathsf{G} : \mathcal{W} \to \mathcal{U} \end{array} \quad : \quad \mathsf{G}\circ\mathsf{F} : \begin{cases} \mathcal{V} & \to \quad \mathcal{U} \\ \mathbf{v} & \mapsto \quad (\mathsf{G}\circ\mathsf{F})(\mathbf{v}) := \mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathbf{v})) \end{cases} .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz V.2.0.F (Komposition linearer Abbildungen)**.**
Die Hintereinanderausführung (Komposition) zweier linearer Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung:

$$\mathsf{L} \in \mathcal{L}(V,W),\, \mathsf{S} \in \mathcal{L}(W,U) \quad \Rightarrow \quad \mathsf{S}\circ\mathsf{L} \in \mathcal{L}(V,U)\,.$$

Bild und Kern

Definition V.2.0.G (Nullraum/Kern und Bild einer linearen Abbildung)**.**
Für eine lineare Abbildung $\mathsf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *ist ihr Nullraum/Kern definiert durch*

$$\mathrm{Kern}(\mathsf{L}) := \{\mathbf{v} \in V : \mathsf{L}(\mathbf{v}) = 0\} ,$$

und ihr Bild

$$\mathrm{Bild}(\mathsf{L}) := \{\mathsf{L}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in V\}$$

Satz V.2.0.J (Unterräume zu linearen Abbildungen)**.**
Für eine lineare Abbildung $\mathsf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *ist* $\mathrm{Kern}(\mathsf{L})$ *ein Unterraum (→ Definition III.1.0.C) von* $\mathcal{V}$ *und* $\mathrm{Bild}(\mathsf{L})$ *ein Unterraum von* $\mathcal{W}$*.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition V.2.0.K (Rang einer linearen Abbildung)**.**
$\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *ist ihr Rang die Dimension des Bildes:*

$$\mathrm{Rang}\,\mathsf{L} := \dim \mathrm{Bild}(\mathsf{L}) \; .$$

Affine Abbildungen

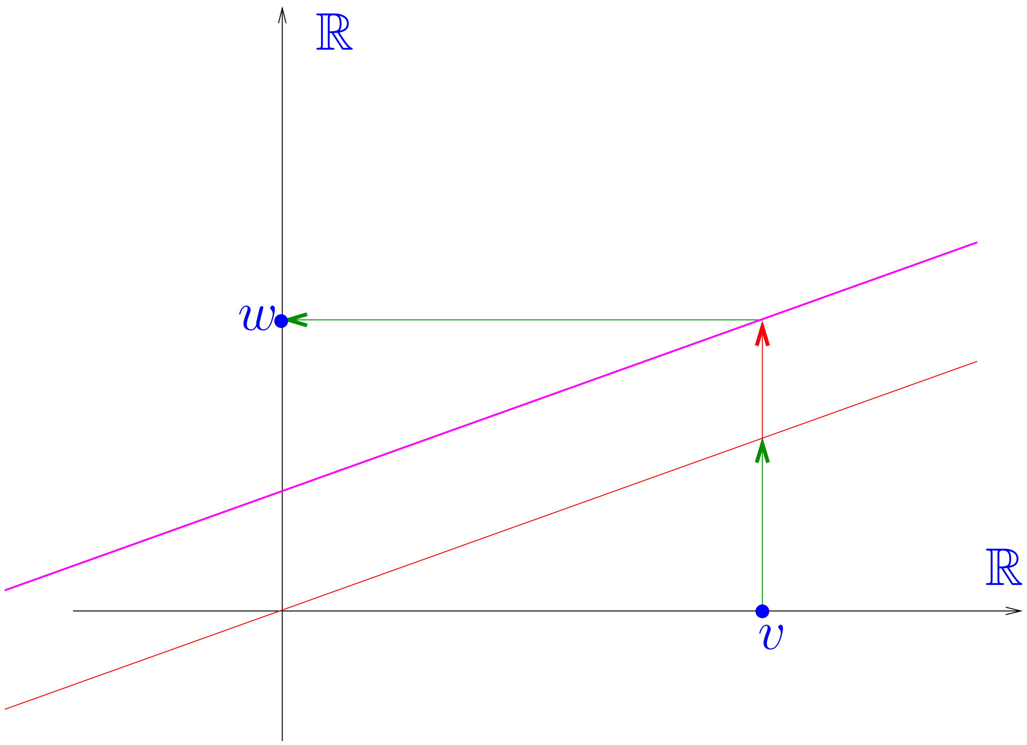
Verallgemeinerung linearer Abbildungen:

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition V.2.0.Q (Affine Abbildung)**.**
Eine Abbildung $\mathsf{M} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *ist eine affine Abbildung, wenn es eine* lineare Abbildung $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *und einen Verschiebungsvektor* $\mathbf{t} \in \mathcal{W}$ *so gibt, dass*

$$\mathsf{M}(\mathbf{v}) = \mathsf{L}(\mathbf{v}) + \mathbf{t} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \; .$$

Beispiel V.2.0.T (Affine Abbildung auf dem n dimensionalen Raum).



$$\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R},\ \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W} = 1$$

$\triangleleft$ Funktionsgraph einer affinen Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: beliebige Gerade

$$w = \gamma v + \tau\ , \quad \gamma, \tau \in \mathbb{R}\ .$$

$\diamond$

Beachte: Eine affine Abbildung bildet immer noch affine Teilräume von $\mathcal{V}$ wieder auf solche von $\mathcal{W}$ ab, Verbindungsstrecken auf Verbindungsstrecken, jedoch nicht mehr Unterräume auf Unterräume!

5.3 Matrixdarstellung

5.3.1 Definition

Satz V.3.1.B (Festlegung einer linearen Abbildung)**.**
Eine lineare Abbildung $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *ist* eindeutig *durch ihre Wirkung auf die Vektoren einer Basis von* $\mathcal{V}$ *bestimmt.*

Ist $\mathcal{B}_V := \{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\}$, $n := \dim \mathcal{V}$, eine Basis von $\mathcal{V}$
und $\mathcal{B}_W := \{\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^m\}$, $m := \dim \mathcal{W}$, eine Basis von $\mathcal{W}$, so ist die

Matrixdarstellung ("Koordinatendarstellung") $\mathbf{A} := \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}^{\mathfrak{B}_W}(\mathsf{L}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ von $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$

bzüglich der Basen $\mathfrak{B}_V$ und $\mathfrak{B}_W$ definiert durch

$$(\mathbf{A})_{\ell,j} := a_{\ell,j}\,,\quad \ell \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{wobei} \quad \boxed{\mathsf{L}(\mathbf{b}^j) = \sum_{\ell=1}^{m} a_{\ell,j}\,\mathbf{q}^\ell}\,, \qquad \text{(V.3.1.C)}$$

d.h. in der j. Spalte der Darstellungsmatrix $\mathbf{A}$ stehen die Koordination des Bildes des j. Basisvektors von $\mathcal{V}$.

Satz V.3.1.D (Vektorseite und Koordinatenseite)**.**
Sind $\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W$ Basen von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ und $\mathbf{A}$ die Matrixdarstellung von $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ bzgl. $\mathfrak{B}_V$ $\mathfrak{B}_W$, dann gilt

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}(\mathsf{L}(\mathbf{v})) = \mathbf{A} \cdot \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \; .$$

$$\blacktriangleright \qquad \boxed{\mathsf{L} = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}^{-1} \circ \mathsf{L}_{\mathbf{A}} \circ \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}} \; . \tag{V.3.1.E}$$

Graphisch dargestellt: Wenn $\dim \mathcal{V} = n$, $\dim \mathcal{W} = m$:

$$\text{Vektorseite} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\text{Lineare Abbildung } \mathsf{L}} & \mathcal{W} \\ {\scriptstyle \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[\text{Multiplikation mit Matrix } \mathbf{A}]{} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad \text{Koordinatenseite} \; .$$

Da $\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}, \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}$ bijektiv:

Satz V.3.1.G (Injektivität und Surjektivität linearer Abbildungen)**.**
Sei $\mathbf{A}$ *eine Matrixdarstellung von* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *(bzgl.* beliebiger *Basen). Dann gilt*

(i) L *surjektiv* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{L}_{\mathbf{A}}$ *surjektiv* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^{\dim \mathcal{W}}$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{W}$*,*

(ii) L *injektiv* $\Leftrightarrow$ $\mathsf{L}_{\mathbf{A}}$ *injektiv* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \dim \mathcal{V}$*.*

Erinnerung: Begriffe aus der Analysis-Vorlesung [**?**, Abschnitt 2.1]:

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

- Eine Abbildung $\mathsf{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ is surjektiv, wenn $\mathsf{F}(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$.
- Eine Abbildung $\mathsf{F} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ is injektiv, wenn

$$\mathsf{F}(\mathbf{v}) = \mathsf{F}(\mathbf{v}') \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' \,.$$

Eine lineare Abbildung $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ kann *nur dann* bijektiv sein, wenn $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$!

Satz V.3.1.H (Matrixdarstellung und spezielle Unterräume)**.**
Es seien $\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W$ *Basen von* $\mathcal{V}$ *und* $\mathcal{W}$ *und* $\dim\mathcal{V} = n$, $\dim\mathcal{W} = m$*. Dann gilt für eine lineare Abbildung* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *mit* Matrixdarstellung $\mathbf{A} = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}^{\mathfrak{B}_W}(\mathsf{L}) \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}(\mathrm{Bild}(\mathsf{L})) = \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^m \; ,$$
$$\mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}(\mathrm{Kern}(\mathsf{L})) = \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^n \; .$$

“Dimensionssatz” Korollar III.3.0.H ► $\dim\mathrm{Kern}(\mathsf{L}) = \dim\mathcal{V} - \dim\mathrm{Bild}(\mathsf{L}) \; .$ **(4.2.J)**

Satz V.3.1.J (Matrixdarstellung der Komposition linearer Abbildungen)**.**
Es bezeichnen $l, n, m \in \mathbb{N}_0$ *die Dimensionen von* $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$. *Ferner seien* $\mathfrak{B}_U$, $\mathfrak{B}_V$ *und* $\mathfrak{B}_W$ *Basen von* $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$.
Ferner sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *die Matrixdarstellung von* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *bzgl. der Basen* $\mathfrak{B}_V$ *und* $\mathfrak{B}_W$ *(*$\mathbf{A} = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_V}^{\mathfrak{B}_W}(\mathsf{L}) \in \mathbb{R}^{m,n}$*), und* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{l,m}$ *die Matrixdarstellung von* $\mathsf{S} \in \mathcal{L}(W, U)$ *bzgl. der Basen* $\mathfrak{B}_W$ *und* $\mathfrak{B}_U$ *(*$\mathbf{B} = \mathsf{K}_{\mathfrak{B}_W}^{\mathfrak{B}_U}(\mathsf{S}) \in \mathbb{R}^{l,m}$*).*
Dann hat $\mathsf{S} \circ \mathsf{L}$ *die Matrixdarstellung* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l,n}$ *bzgl.* $\mathfrak{B}_V$ *und* $\mathfrak{B}_U$*:*

$$\mathsf{K}_{\mathcal{B}_V}^{\mathfrak{B}_U}(\mathsf{S} \circ \mathsf{L}) = \mathsf{K}_{\mathcal{B}_W}^{\mathfrak{B}_U}(\mathsf{S}) \cdot \mathsf{K}_{\mathcal{B}_V}^{\mathfrak{B}_W}(\mathsf{L}) \ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

5.3.2 Matrixdarstellung bei Basiswechsel

Betrachte $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Klar: Matrixdarstellung gemäss (V.3.1.C) ist abhängig von der Wahl der Basen.

Fragestellung wie in Abschnitt 3.4: Wie ändert sich die Matrixdarstellung bei Wechsel zu anderen Basen?

Für $\mathcal{V}$ mit $\dim \mathcal{V} = n$: „alte Basis” $\mathfrak{B}_V := \{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^n\}$
„neue Basis” $\widetilde{\mathfrak{B}}_V := \{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \dots, \widetilde{\mathbf{b}}^n\}$

Für $\mathcal{W}$ mit $\dim \mathcal{V} = m$: „alte Basis” $\mathfrak{B}_W := \{\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^m\}$
„neue Basis” $\widetilde{\mathfrak{B}}_W := \{\widetilde{\mathbf{q}}^1, \dots, \widetilde{\mathbf{q}}^m\}$

(Inverse) Basiswechselmatrizen, vgl. Satz III.4.0.H:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}: \quad & \widetilde{\mathbf{b}}^k = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{S})_{j,k} \mathbf{b}^j \;, \quad k \in \{1, \dots, n\} \;, \\
\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m,m}: \quad & \mathbf{q}^\ell = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{R})_{i,\ell} \widetilde{\mathbf{q}}^i \;, \quad \ell \in \{1, \dots, n\} \;.
\end{aligned} \tag{V.3.2.A}$$

Beachte: $\mathbf{R}$ ist die Basiswechselmatrix neue Basis $\rightarrow$ alte Basis.

Satz V.3.2.B (Transformation von Matrixdarstellungen)**.**
Es seien $\mathfrak{B}_V, \widetilde{\mathfrak{B}}_V$ *Basen von* $\mathcal{V}$ *und* $\mathfrak{B}_W, \widetilde{\mathfrak{B}}_W$ *solche von* $\mathcal{W}$*. Ferner, bezeichne* $\mathbf{S}$ *die Basiswechselmatrix* $\widetilde{\mathfrak{B}}_V \to \mathfrak{B}_V$ *und* $\mathbf{R}$ *die Basiswechselmatrix* $\mathfrak{B}_W \to \widetilde{\mathfrak{B}}_W$*, siehe* (V.3.2.A)*.*
Ist $\mathbf{A}$ *die* Matrixdarstellung *von* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *bzgl.* $\mathfrak{B}_V$ *und* $\mathfrak{B}_W$*, und* $\widetilde{\mathbf{A}}$ *jene bzgl.* $\widetilde{\mathfrak{B}}_V$ *und* $\widetilde{\mathfrak{B}}_W$*, dann gilt*

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{R}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S}\,.$$

Satz III.4.0.F „Basiswechselmatrix" ➢ $\mathbf{S}, \mathbf{R}$ sind invertierbar ▶ $\mathrm{Rang}\,\mathbf{A} = \mathrm{Rang}\,\widetilde{\mathbf{A}} = \mathrm{Rang}\,(\mathsf{L}$

5.4 Lineare Selbstabbildungen

Nun $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ und $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$

Für $\mathcal{V}$ mit $\dim \mathcal{V} = n$: „alte Basis" $\mathfrak{B}_V := \{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\}$
„neue Basis" $\widetilde{\mathfrak{B}}_V := \{\widetilde{\mathbf{b}}^1, \ldots, \widetilde{\mathbf{b}}^n\}$

Im Kontext von Unterabschnitt 5.3.2: $\mathfrak{B}_W = \mathfrak{B}_V$, $\widetilde{\mathfrak{B}}_W = \widetilde{\mathfrak{B}}_V$ ➤ $\mathbf{R} = \mathbf{S}^{-1}$

Satz V.4.0.B (Transformation der Matrixdarstellung einer Selbstabbildung)**.**
Sind $\mathbf{A}, \widetilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *die Matrixdarstellungen* einer *linearen Selbstabbildung* $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ *von* $\mathcal{V}$ *bzgl. der beiden Basen* $\mathfrak{B}_V$ *bzw.* $\widetilde{\mathfrak{B}}_V$*, dann gilt*

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{S}\,.$$

Definition V.4.0.D (Ähnlichkeit von Matrizen)**.**
Zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *heissen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix* $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *so gibt, dass*

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\,.$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

5.5 Projektionen

Definition V.5.0.A (Projektion)**.** *Eine lineare Selbstabbildung* $\mathsf{P} \in \mathcal{L}(V, V)$ *heisst Projektion, wenn*

$$\mathsf{P}^2 := \mathsf{P} \circ \mathsf{P} = \mathsf{P} \; .$$

Satz V.5.0.B (Invarianz des Bildes einer Projektion)**.**
Projektionen lassen jeden Vektor in ihrem Bild unverändert:

$$\text{für jede Projektion} \quad \mathsf{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}) : \qquad \mathbf{v} \in \mathrm{Bild}(\mathsf{P}) \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \; .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition V.5.0.C (Direkte Summe und Komplemente)**.**
Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ *Unterräume von* $\mathcal{V}$*. Dann ist* $\mathcal{V}$ *die direkte Summe von* $\mathcal{X}$ *und* $\mathcal{Y}$*, in Zeichen* $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$*, wenn es zu jedem* $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ eindeutig *bestimmte Vektoren* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ *und* $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ *so gibt, dass* $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$.
$\mathcal{Y}$ *heisst dann ein Komplement von* $\mathcal{X}$ *in* $\mathcal{V}$*, und* $\mathcal{X}$ *ein Komplement von* $\mathcal{Y}$ *in* V.

Korollar V.5.0.D (Eigenschaften der direkten Summe)**.**
Wenn (mit den Notationen von Definition V.5.0.C) $\mathcal{V} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$*, dann gilt*

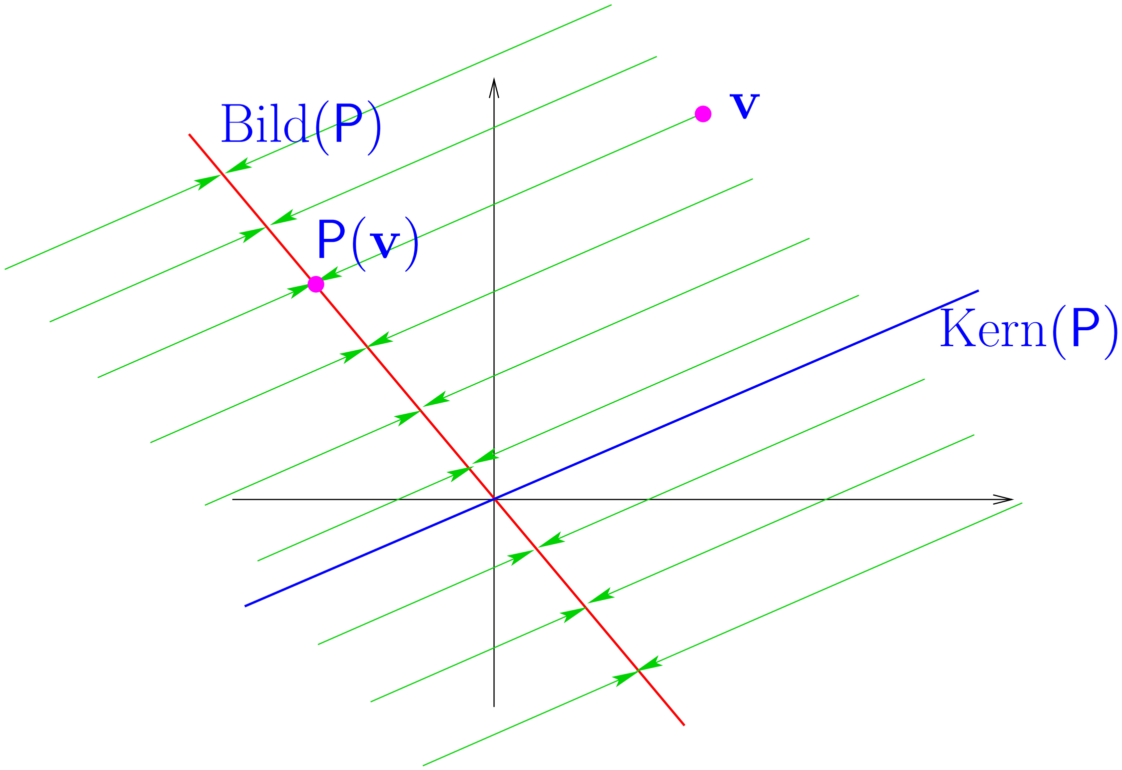
- $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y}$,
- $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \{\mathbf{0}\}$.

Satz V.5.0.D (Raumzerlegung durch Projektionen)**.**
Für eine Projektion $\mathsf{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ *gilt*

$$\begin{array}{c} \mathcal{V} = \mathrm{Kern}(\mathsf{P}) + \mathrm{Bild}(\mathsf{P}) \;, \\ \mathrm{Kern}(\mathsf{P}) \cap \mathrm{Bild}(\mathsf{P}) = \{\mathbf{0}\} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{V} = \mathrm{Kern}(\mathsf{P}) \oplus \mathrm{Bild}(\mathsf{P}) \;.$$

Man bezeichnet P *dann als Projektion auf* $\mathrm{Bild}(\mathsf{P})$ *in Richtung von* $\mathrm{Kern}(\mathsf{P})$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



$\triangleleft$ Veranschaulichung in 2D

Komplementäre Unterräume zu einer Projektion P

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz V.5.0.G (Spezielle Matrixdarstellung von Projektionen)**.**
Zu jeder Projektion $\mathsf{P} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ *gibt es eine Basis* $\mathfrak{B}_V$ *von* V*, so dass* P *die Matrixdarstellung*

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

besitzt, wobei $n = \dim \mathcal{V}$, $r = \mathrm{Rang}\,\mathsf{P}$*, und* $\mathbf{O}$ *für Nullmatrizen geeigneter Grösse steht.*

Konkrete Wahl von $\mathfrak{B}_V$ in Satz V.5.0.G

$$\mathfrak{B}_V = \{ \underbrace{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^r}_{\text{Basis von } \mathrm{Bild}(\mathsf{P})} , \underbrace{\mathbf{b}^{r+1}, \dots, \mathbf{b}^n}_{\text{Basis von } \mathrm{Kern}(\mathsf{P})} \} . \tag{V.5.0.H}$$

Orhtogonalprojektionen

Nun $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ mit Euklidischem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (→ Definition IV.1.1.A)

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Verallgemeinerung eines Konzepts aus Unterabschnitt 4.2.3:

Definition V.5.0.I (Orthogonalprojektion)**.**
Eine Projektion $\mathsf{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ *heisst Orthogonalprojektion, falls* $\mathbf{v} - \mathsf{Q}(\mathbf{v})$ *für jedes* $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ *orthogonal zu* $\mathrm{Bild}(\mathsf{Q})$ *ist, d.h., falls*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} - \mathsf{Q}(\mathbf{v}) \rangle = 0 \quad \textit{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \textit{und alle} \quad \mathbf{x} \in \mathrm{Bild}(\mathsf{Q}) \; .$$

Satz V.5.0.J (Orthogonalität von Bild und Kern bei Orthogonalprojektionen)**.**
Eine Projektion $\mathsf{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ *ist* genau dann *eine* Orthogonalprojektion*, wenn*

$$\mathrm{Kern}(\mathsf{P}) \perp \mathrm{Bild}(\mathsf{P}) \ .$$

► P Orthogonalprojektion ➢ $\mathrm{Kern}(\mathsf{P}) = \mathrm{Bild}(\mathsf{P})^{\perp}$
(vgl. Definition IV.3.2.B „Orthogonales Komplement”)

Unterabschnitt 4.2.3: Darstellungsformel für Orthogonalprojektionen ($\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,k}$, $\mathrm{Rang}\,\mathbf{B} = k$)

$$\mathbf{q} \mapsto \mathbf{B}(\mathbf{B}^{\top}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\top}\mathbf{q} \quad = \text{Orthogonalprojektion auf} \quad \mathrm{Bild}(\mathbf{B}) \ .$$

Korollar V.5.0.K (Spezielle Matrixdarstellung von Orthogonalprojektionen)**.**
Ist P *eine Orthogonalprojektion, so können die speziellen Basen aus Satz V.5.0.G orthonormal (→ Definition IV.3.1.A) gewählt werden.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

5.6 Isometrien im Euklidischen Raum

Hier $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$ mit Euklidischem Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (→ Definition IV.1.1.A) und induzierten Normen $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_W$ (→ Definition IV.1.2.A)

5.6.1 Lägenerhaltung

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition V.6.1.A (Isometrie)**.**
Eine lineare Selbstabbildung $\mathsf{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *heisst Isometrie oder längenerhaltend, wenn*

$$\|\mathsf{Q}(\mathbf{v})\|_W = \|\mathbf{v}\|_V \quad \textit{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{V} \ .$$

Satz V.6.1.C (Isometrien sind injektiv)**.**
Für jede Isometrie $\mathsf{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *gilt, dass* $\mathrm{Kern}(\mathsf{Q}) = \{\mathbf{0}\}$.

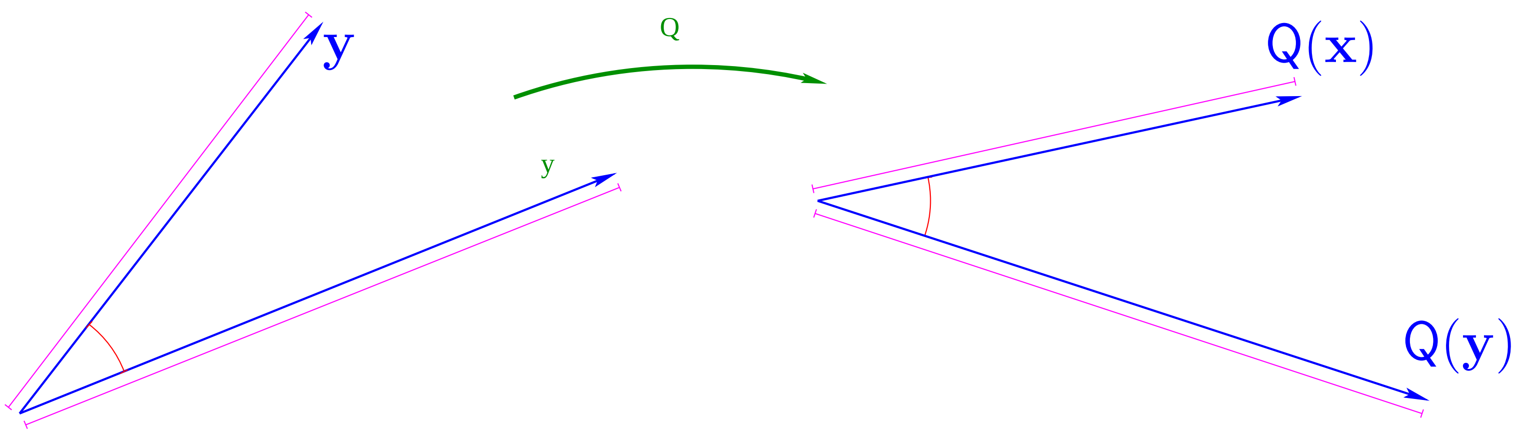
❶ ▶ Notwendig $\dim \mathcal{W} \geq \dim \mathcal{V}$

❷ ▶ Längenerhaltende lineare Selbstabbildungen sind bijektiv

Satz V.6.1.D (Längenerhaltung impliziert Winkelerhaltung)**.**
Genau die längenerhaltenden linearen Abbildungen erhalten das Skalarprodukt, d.h. für jede Isometrie $\mathsf{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *gilt*

$$\langle \mathsf{Q}\mathbf{x}, \mathsf{Q}\mathbf{y} \rangle_W = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V \quad \textit{für alle} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V} \ .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ



Isometrien
sind
winkeltreu

Gleiche Längen, gleiche Winkel

Satz V.6.1.F (Darstellung von Isometrien durch orthogonale Matrizen)**.**
Es seien $\mathfrak{B}_V$ und $\mathfrak{B}_W$ Orthonormalbasen (ONB) von $\mathcal{V}$ bzw. $\mathcal{W}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ ($n = \dim \mathcal{V}$, $m = \dim \mathcal{W}$) die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung $\mathsf{L} \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.
Dann ist L genau dann *eine* Isometrie, *wenn $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, also wenn die Spalten von $\mathbf{A}$ orthonormal sind.*

▶ Längenerhaltende lineare *Selbstabbildungen* werden bzgl. jeder ONB durch eine orthogonale Matrix dargestellt.

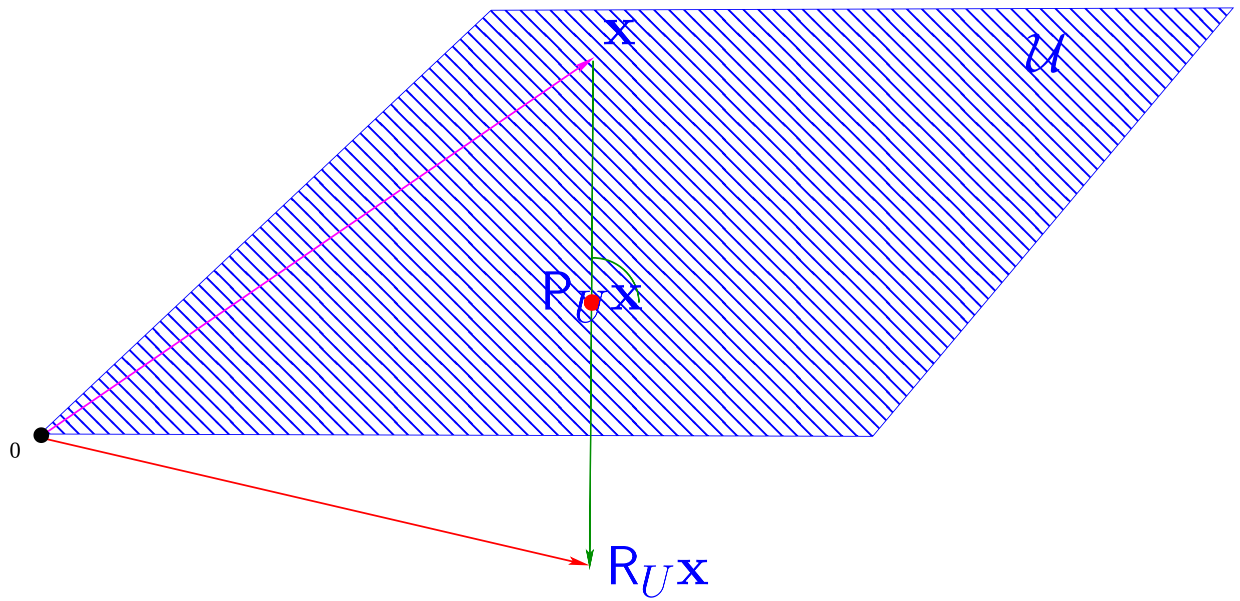
5.6.2 Spiegelungen

Hier $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathbb{R}^n$ mit Euklidischen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Definition V.6.2.G (Spiegelung)**.**
Sei $n := \dim \mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ ein Unterraum von $\mathcal{V}$ und P_U die orthogonale Projektion auf $\mathcal{U}$. Die lineare Abbildung

$$\mathsf{R}_U := 2\mathsf{P}_U - \mathsf{Id} \in \mathcal{L}(V,V)$$

ist die Spiegelung an $\mathcal{U}$.



◁ Veranschaulichung in 3D

Spiegelung an $\mathcal{U}$

$$\mathsf{R}_U(\mathbf{x}) = \mathsf{P}_U(\mathbf{x}) + (\mathsf{P}_U(\mathbf{x}) - \mathbf{x})$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz V.6.2.J (Spiegelungen sind längenerhaltend)**.**
Jede Spiegelung ist eine Isometrie.

5.6.3 Drehungen

5.6.3.1 Drehungen im $\mathbb{R}^2$

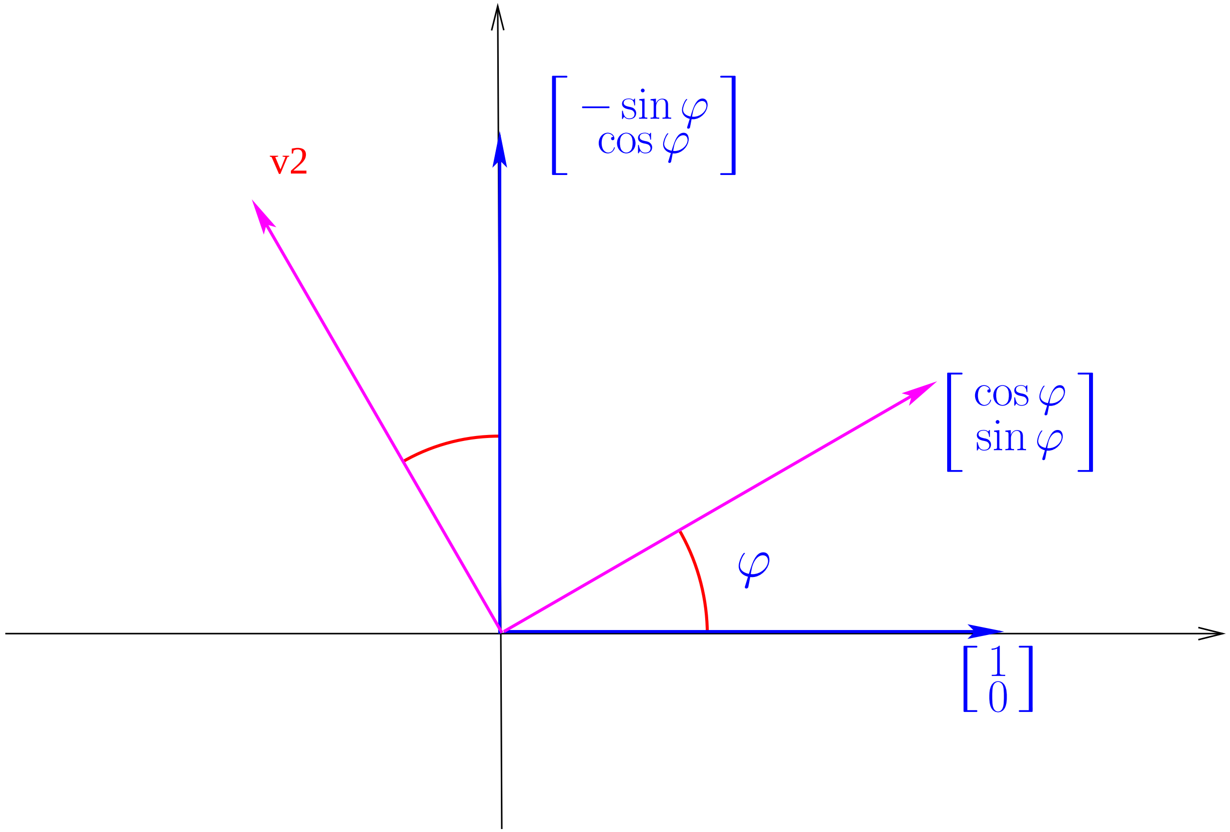
Definition V.6.3.K (Drehung in der Ebene)**.**
Eine Drehung im $\mathbb{R}^2$ ist jede lineare Abbildung, die bezüglich der Basis $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ durch eine Matrix der Form

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi[\ .$$

beschrieben wird. Dabei heisst φ der Winkel der Drehung.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz V.6.3.K (Matrixdarstellung von Drehungen in der Ebene)**.**



$\triangleleft$ Drehung um $\mathbf{0}$ um den Winkel φ (gegen den Uhrzeigensinn)

5.6.3.2 Drehungen im $\mathbb{R}^3$

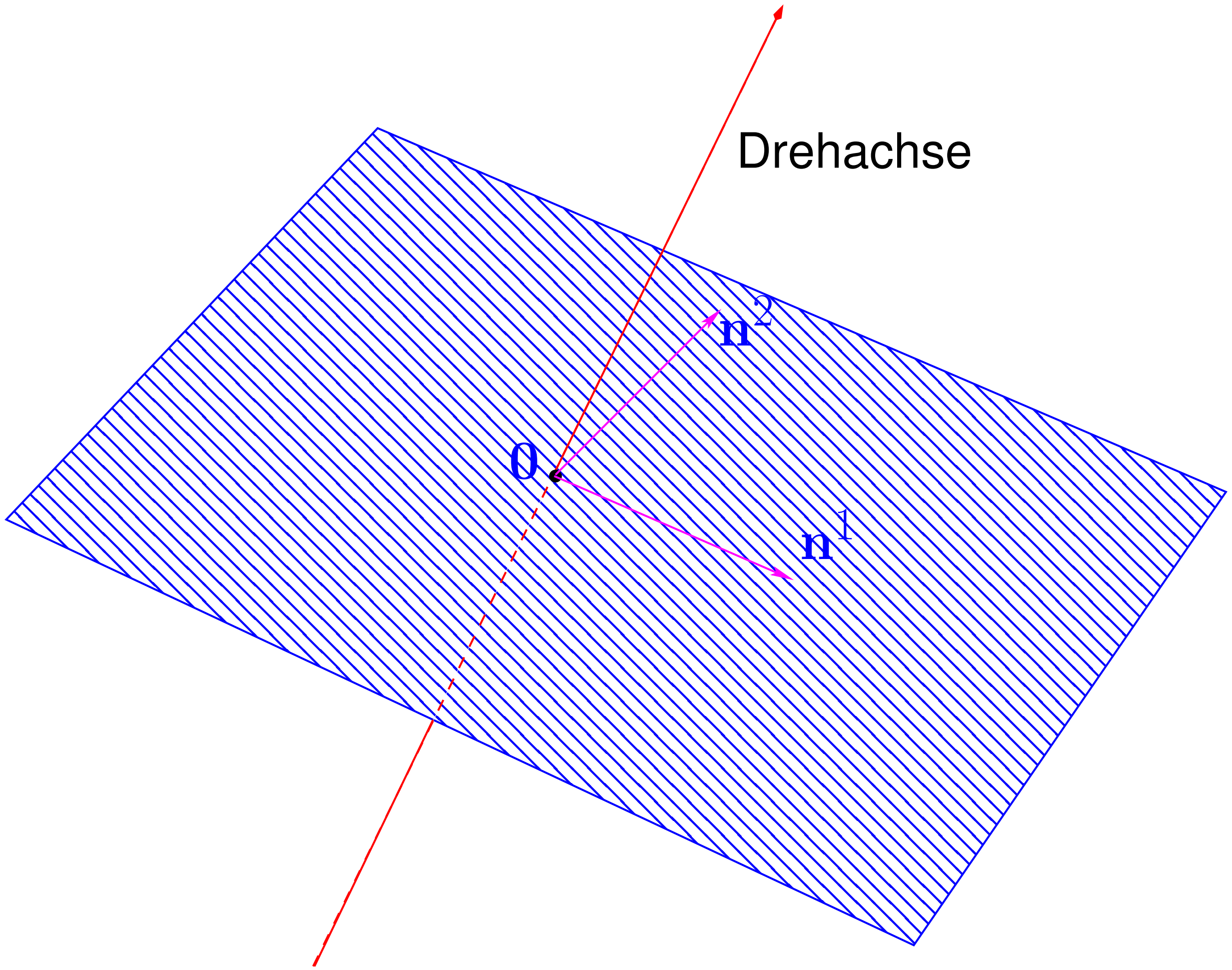
Definition V.6.3.L (Drehung in 3D)**.**

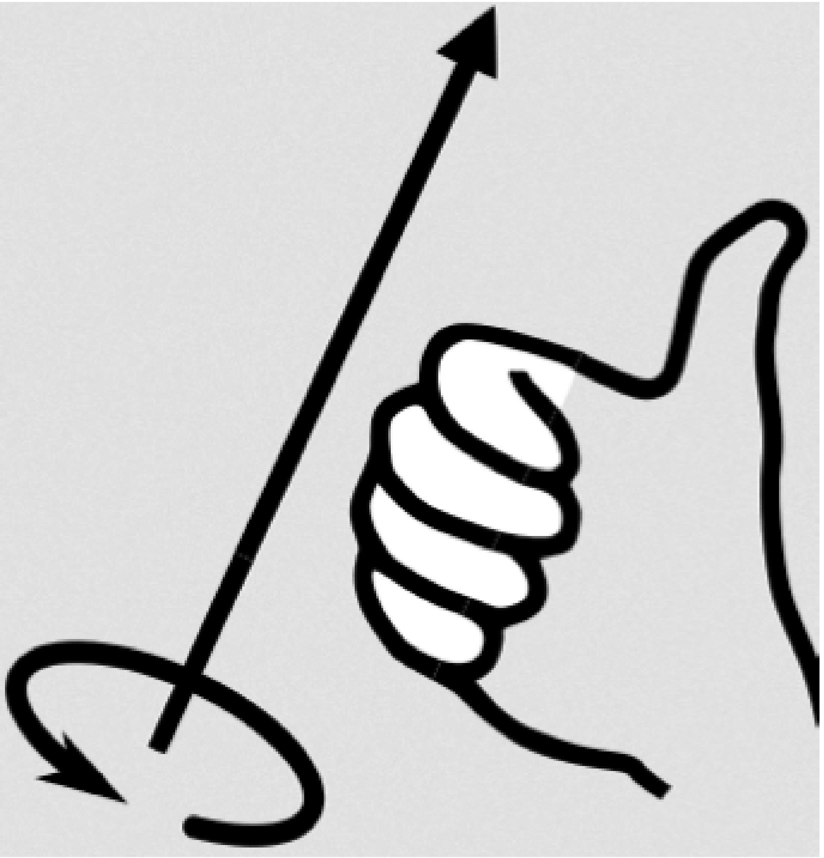
Eine Drehung im $\mathbb{R}^3$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ zur der es eine Basis $\{\mathbf{n}^1 \times \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2\}$ mit orthonormalen Vektoren $\{\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2\}$ so gibt, dass ihre Matrixdarstellung bzgl. dieser Basis die Gestalt

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} , \quad \textit{mit} \quad \varphi \in [0, 2\pi[\; ,$$

hat. Dann heisst φ der Drehwinkel und die Gerade $\operatorname{Span}\{\mathbf{n}^1 \times \mathbf{n}^2\}$ ist die Drehachse.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ





Rechte-Hand-Regel

Berechnung der Matrixdarstellung einer Rotation:

Listing 5.3: Berechnung der Matrixdarstellung einer Rotation in der kanonischen Basis des 3-dimensionalen Raum

```
function M = rotmatrix(a,phi)
% MATLAB function computing the matrix representation of a rotation about the
% axis in direction of the vector a ∈ ℝ^3 with angle φ.
% Note: Right hand rule should be applied to fix the sense of the rotation,
% but, for the sake of simplicity, this is not done in this code.

% First compute a special orthonormal basis with the normalized vector
% a as first element. This can be done by means of the full QR-decomposition
% of the 3 × 1-"matrix" a.
[Q,R] = qr(a);
% This is the matrix representation of the rotation with respect to the
% specical orhtoonormal basis
c = cos(phi); s = sin(phi);
D = [1 , 0  , 0  ;...
     0 , c  , -s ;...
     0 , s  , c  ];
% Finally compute the transformation of the matrix representation.
% Note that a prime in MATLAB denotes transposition.
M = Q*D*Q';
```

6 Diagonalisierung

LINK zur Vorlesungsniederschrift für Kapitel 6

6.1 Motivation: Lineare Rekursionen

Beispiel VI.1.0.P (Altersstruktur einer Population).

Zustandsraum $\mathcal{V} := \mathbb{R}^n$: $n \in \mathbb{N} \hat{=}$maximales Alter
$\mathbf{x} \in \mathcal{V} ➢ (\mathbf{x})_i \hat{=}$Anzahl Weibchen im i. Lebensjahr, $i \in \{1, \ldots, n\}$

Modellparameter: $f_i \in \mathbb{R}^+$: Durchschnittliche Anzahl von weiblichen Nachkommen eines Weibchens im i. Lebensjahr (fecundicity)
$m_i \in [0, 1]$: Todeswahrscheinlichkeit für ein Weibchen im i. Lebensjahr (mortality)

Listing 6.1: (agestructpop.m) Simulation der Entwicklung der Altersstruktur einer Population in MATLAB

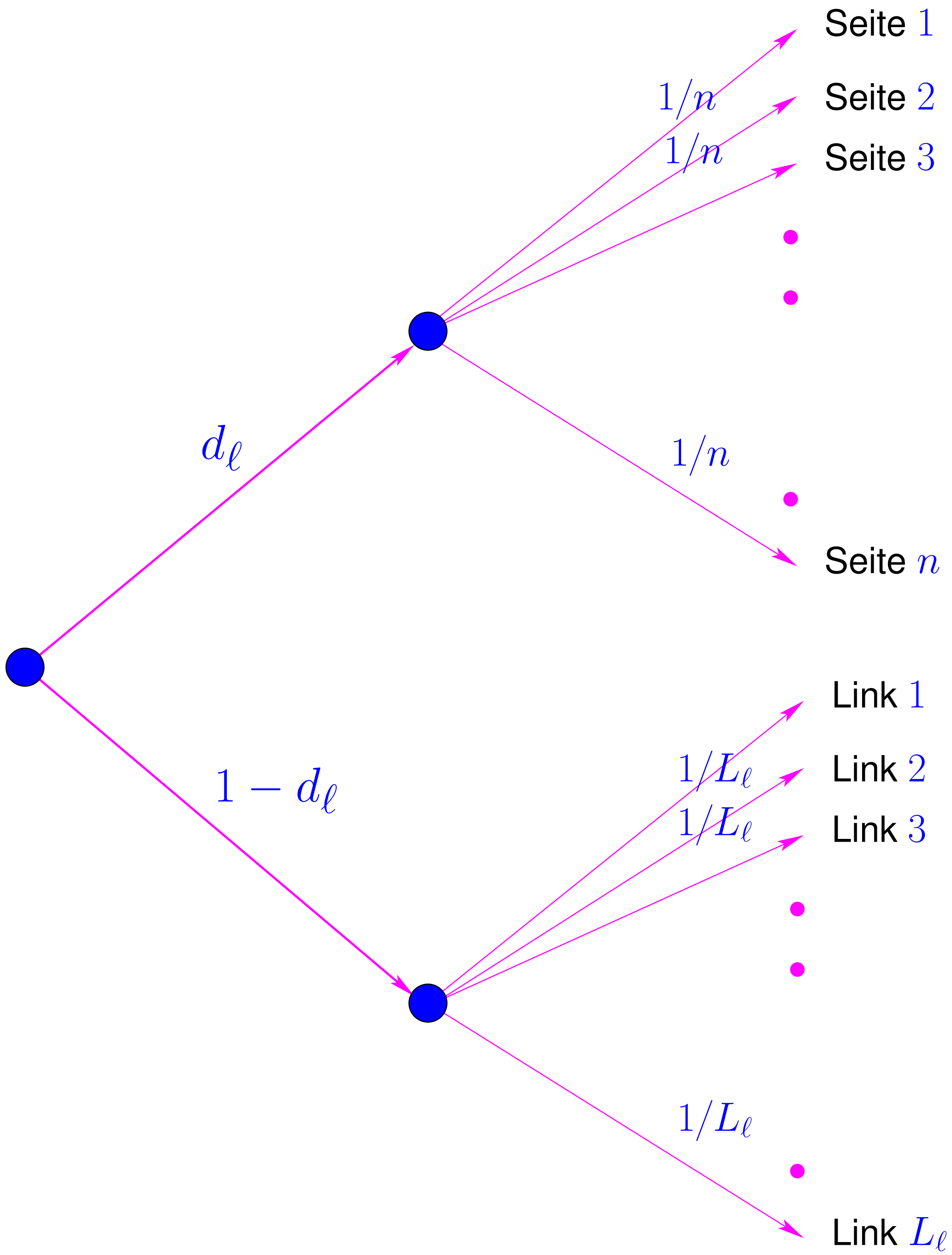
```
function agestructpop(x0,m,f,maxsteps)
% Simulation of evolution of age structured population, the vector x0
% pasess the number of individuals in each age group in the beginning, the
% vectors m and f specify mortality and fecundicity. All vectors must be of
% the same length.
n = numel(x0); % Maximum age

% set up propagation matrix for linear evolution
A = [f';[diag(1-m(1:n-1)),zeros(n-1,1)]];
% Figure for visualization
figure('name','evolution of age structured population');
% Evolution loop
if (nargin < 4), maxsteps = 100; end
totnr = [0, sum(x0)];
x = x0;
for k=1:maxsteps
  bar(x,'r'); xlabel('age'); ylabel('no of females x 1000');
  title(sprintf('Year %i',k-1));
  reply = input('Continue? Y/N [Y]: ','s');
  if (~isempty(reply)), break; end
  x = A*x; % Update population; advance one year
  totnr = [totnr; k, sum(x)];
end
% Plot total number of individuals
figure('name','total no');
plot(totnr(:,1),totnr(:,2),'m-*');
xlabel('{\bf age}'); ylabel('{\bf no of females x 1000}');
title('{\bf Total number of females in different years}');
```

Beispiel VI.1.0.Q ((Vereinfachter) Page-Rank Algorithmus). → [**?**]

- „Modellinternet” mit n Seiten, nummeriert $1, \dots, n$.
- $L_\ell \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der Links auf Seite ℓ, $\ell \in \{1, \dots, n\}$
- Clickverhalten eines Zufallssurfers, der sich aktuell auf Seite ℓ befindet:
  - Mit der Wahrscheinlichkeit ($d^* \in]0,1[$ gegeben)

$$d_\ell := \begin{cases} 1 & \text{, wenn} \quad L_\ell = 0 \;, \\ d^* \in]0,1[& \text{, wenn} \quad L_\ell > 0 \;, \end{cases}$$

    springt der Surfer gleichwahrscheinlich zu einer beliebigen der n Webseiten.
  - Mit der Wahrscheinlichkeit $1 - d_\ell$ folgt er gleichwahrscheinlich einem beliebigen der L_ℓ Links auf Seite ℓ.



Verhalten des Zufallssurfers auf Seite ℓ:
$\triangleleft$ Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Listing 6.2: (prpowitsim.m) Simulation der Entwicklung der Altersstruktur einer Population in MATLAB

```
function prpowitsim(d,Nsteps)
% MATLAB way of specifying Default arguments
if (nargin < 2), Nsteps = 100; end
if (nargin < 1), d = 0.15; end
% load connectivity matrix and build transition (recursion) matrix
load harvard500.mat; A = prbuildA(G,d);
N = size(A,1); x = ones(N,1)/N;

figure('position',[0 0 1200 1000]);
bh = bar(1:N,x,'hist'); set(bh,'facecolor','r'); axis([0 N+1 0 0.1]);
% Linear evolution for stochastic recursion matrix A
for l=1:Nsteps
  pause; x = A*x; bh = bar(1:N,x,'hist'); set(bh,'facecolor','r'); axis([0 N+1 0 0.1]);
  title(sprintf('{\\bf click number %d}',l),'fontsize',32);
  xlabel('{\bf harvard500 data set: no. of page}','fontsize',14);
  ylabel('{\bf probability for surfer on page}','fontsize',14); drawnow;
end
```

Definition VI.1.0.A (Lineare Rekursion)**.**
Für eine gegebene quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *heisst eine der Vorschrift*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} \;, \quad k \in \mathbb{N}_0 \;,$$

genügende Folge $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots) \subset \mathbb{R}^n$ *von Spaltenvektoren eine (homogene) lineare Rekursion mit Startvektor* $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *und Rekursionsmatrix (Propagationsmatrix)* $\mathbf{A}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition VI.1.0.C (Stochastische Matrix)**.**
Eine quadratische Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *heisst stochastisch, wenn*

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{P})_{i,j} = 1 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \;.$$

(Alle Spaltensummen $= 1$*)*

Definition VI.1.0.E (Stationäre Markov-Kette)**.**
Eine Stationäre Markov-Kette ist eine homogene lineare Rekursion mit

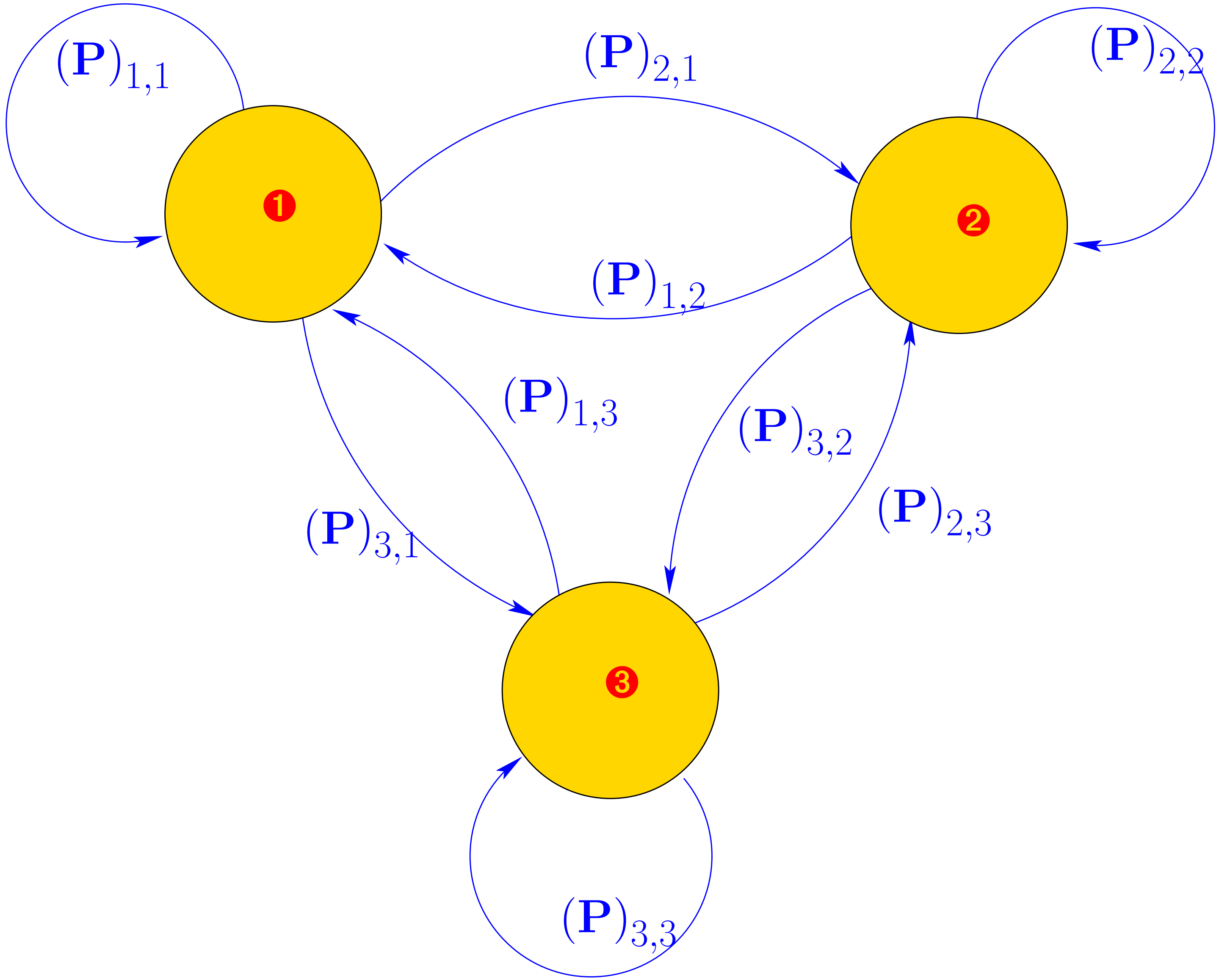
(i) einer stochastischen *Propagationsmatrix,*

(ii) einem Startvektor für den $\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}^{(0)})_j = 1$.

Interpretation einer stationären Markov-Kette im $\mathbb{R}^n$ mit Propagationsmatrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$:

- Modell für System mit n Zuständen
- $(\mathbf{x}^{(k)})_j \mathrel{\hat{=}}$ Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im k. Schritt in Zustand j befindet.
- $(\mathbf{P})_{i,j} \mathrel{\hat{=}}$ Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand j in Zustand i

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

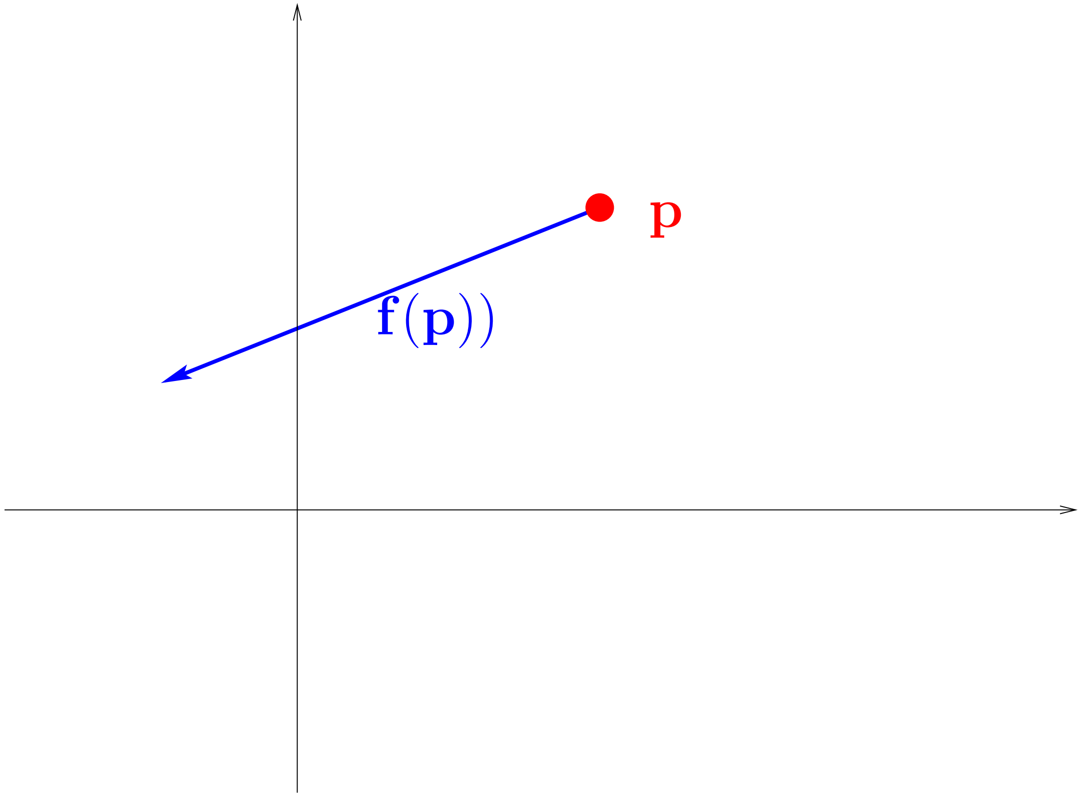


$\triangleleft$ Schema einer stationären Markov-Kette mit $n = 3$ Zuständen, und Übergangswahrscheinlichkeiten $(\mathbf{P})_{i,j}$

Beispiel VI.1.0.R (Diskretes dynamisches System)*.*

- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \hat{=}$ Kraftfeld: $\quad \mathbf{f} : \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 & \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{Position} & \mapsto \text{wirkende Kraft} \end{cases}$,
- $\mathbf{p}^{(k)} \hat{=}$ Position des Teilchens im k. Zeitschritt,

- $\mathbf{v}^{(k)} \mathrel{\hat=}$ Geschwindigkeit des Teilchens im k. Zeitschritt,
- Zeitschrittlänge $\tau > 0$.



◁ In der Ebene (mit Kartesischem Koordinatensystem)

Kraft $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ auf Punktmasse an Position $\mathbf{p}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k)} &= \tau \cdot \tfrac{1}{2}\big(\mathbf{f}(\mathbf{p}^{(k+1)}) + \mathbf{f}(\mathbf{p}^{(k)})\big) \;, \\ \mathbf{p}^{(k+1)} - \mathbf{p}^{(k)} &= \tau \cdot \tfrac{1}{2}\big(\mathbf{v}^{(k+1)} + \mathbf{v}^{(k)}\big) \;. \end{aligned} \tag{VI.1.0.S}$$

Lineare Rückstellkraft: $\mathbf{f}(\mathbf{p}) := -\mathbf{A}\mathbf{p}$ mit symmetrischer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$

Listing 6.3: (movingparticle.m) Simulation der Bewegung eines Teilchens im linearen Kraftfeld

```
function trajectory = movingparticle(A,p0,v0,tau,Nsteps)
% Simulation and visualization of the movement of a particle in a linear
% force field (defined by matrix A, harmonic oscillator) with implicit
% midpoint rule and uniform timestep tau. Initial conditions passed in
% p0, q0.
x = [v0;p0]; % Initial state
M = 0.5*tau*[zeros(2,2), -A;eye(2), zeros(2,2)];
% Evolution loop
for k=1:Nsteps
  title(sprintf('Moving  particle in linear force field: timestep %i',k));
  plot(x(3,end),x(4,end),'r.'); drawnow;
  % Update of velocity and position
  x = (eye(4)-M)\(eye(4)+M)*x;
end
```

◇

Lineare skalare Mehrtermrekursionen

Definition VI.1.0.T (Lineare skalare Mehrtermrekursion)**.**
Für gegebenes $m \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *heisst eine der Gleichung*

$$\xi^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \xi^{(k-j+1)} \;, \quad k \geqslant m-1 \;,$$

genügende Zahlenfolge $(\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots)$ *eine* m*-Term-Rekursion mit Startwerten* $\xi^{(0)}, \ldots, \xi^{(m-1)}$.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

6.2 Matrixdiagonalisierung

Definition VI.2.0.A (Diagonalisierbarkeit einer Matrix)**.**
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *heisst diagonalisierbar, wenn es eine* invertierbare *Matrix* $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *und Zahlen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *so gibt, dass*

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} \quad \textit{mit} \quad \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & & & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Diagonalisieren von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ in MATLAB:

(i) `[S,D] = eig(A)` : berechnet $\mathbf{S}$ und $\mathbf{D}$,

(ii) `lambda = eig(A)` : berechnet nur die λ_i.

Kubische asymptotische Komplexität: $O(n^3)$ **!**

(Billiger für *manche* dünnbesetzte, symmetrische Matrizen)

6.2.1 Anwendung: Geschlossene Darstellung linearer Rekursionen

Satz VI.2.1.K (Darstellungsformel für Glieder linearer Rekursionen)**.**
Eine lineare Rekursion $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots)$ *im* $\mathbb{R}^n$ *(→ Definition VI.1.0.A) mit einer diagonalisierbaren Rekursionsmatrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *für die* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathbf{S}^{-1}$, $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$, *gemäss Definition VI.2.0.A,*

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}^{(0)} \;, \quad k \in \mathbb{N} \;.$$

Satz VI.2.1.N (Wachstums- und Abklingverhalten linearer Rekursionen)**.**
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *diagonalisierbar gemäss Definition VI.2.0.A:*

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathbf{S}^{-1} \quad \textit{mit} \quad \lambda_\ell \in \mathbb{R}\,, \quad \ell \in \{1, \ldots, n\}\,.$$

Wir definieren

$$J^- := \{\ell \in \{1, \ldots, n\} \colon |\lambda_\ell| \leqslant 1\}\,. \tag{6.2.1}$$

und

$$\mathcal{E}^- := \mathrm{Span}\{(\mathbf{S})_{:,\ell},\, \ell \in J^-\} \quad (=\{\mathbf{0}\}, \textit{ falls } J^- = \emptyset)\,. \tag{6.2.2}$$

Dann gilt für eine lineare Rekursion $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ *mit Rekursionsmatrix* $\mathbf{A}$*:*

$$\mathbf{x}^{(0)} \in \mathcal{E}^- \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \left\| \mathbf{x}^{(k)} \right\| < \infty\,.$$

6.2.2 Anwendung: Matrixfunktionen

Definition VI.2.2.C (Matrixpolynom)**.**
Sei $p(x) = \alpha_d x^d + \alpha_{d-1} x^{d-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_\ell \in \mathbb{R}$, *ein Polynom vom Grad* $d \in \mathbb{N}_0$ *mit Koeffizienten* α_ℓ*. Dann definiert*

$$p(\mathbf{A}) := \alpha_d \mathbf{A}^d + \alpha_{d-1} \mathbf{A}^{d-1} + \cdots + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_0 \mathbf{I}_n$$

die Auswertung des Polynoms p *für die Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$*.*

Satz VI.2.2.E (Matrixpolynom für diagonalisierbare Matrizen)**.**
Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ diagonalisierbar *gemäss Definition VI.2.0.A:* $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$*.*
Dann gilt für jedes Polynom p

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{S}p(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & 0 & \dots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & p(\lambda_n) \end{bmatrix} .$$

(Diagonalisierung vertauscht mit Polynomauswertung!)

Manche Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ganze Funktionen) lassen sich auf $\mathbb{R}$ durch eine Potenzreihe („Polynom vom Grad ∞", [**?**, Abschnitt 2.12]) darstellen:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad \text{(Exponentialreihe)} ,$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} ,$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} .$$

Definition VI.2.2.G (Matrixexponentialfunktion und trigonometrische Matrixfunktionen)**.**
Wenn φ *für* $\exp$, $\sin$ *oder* $\cos$ *steht, so wird für eine gemäss Definition VI.2.0.A diagonalisierbare Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *mit* $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D}$ *definiert*

$$\varphi(\mathbf{A}) := \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\lambda_1) & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(\lambda_2) & 0 & \dots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & \varphi(\lambda_n) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S}^{-1} . \qquad \text{(VI.2.2.H)}$$

Definition VI.2.2.J (Allgemeine Matrixfunktionen)**.**
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *diagonalisierbar,* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathbf{S}^{-1}$*,* $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$*.*
Ist die Funktion $\varphi : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert auf einer (offenen) Menge* D *mit* $\lambda_\ell \in D$ *für alle* $\ell \in \{1, \dots, n\}$*, dann definiert*

$$\varphi(\mathbf{A}) := \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\lambda_1) & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(\lambda_2) & 0 & \dots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & \varphi(\lambda_n) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S}^{-1} . \qquad \text{(VI.2.2.H)}$$

die *Matrixfunktion* $\varphi(\mathbf{A})$*.*

6.3 Rechnen im n-dimensionalen complexen Raum

$\mathbb{C}^{m,n} \hat{=}$ Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}^{n} \hat{=}$ Menge der Spaltenvektoren Matrizen mit n komplexen Komponenten $\mathbb{C}$

Im $\mathbb{C}^n$ und mit komplexen Matrizen kann man (fast immer) so rechnen wie im $\mathbb{R}^n$, wenn man nur die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ benutzt.

(Fast) alle Konzepte und Resultate über reelle Vektoren/Matrizen übertragen sich auch auf den komplexen Fall.

z.B. Für $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$: $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Rang}(\mathbf{A})$.

z.B. auch die Konzepte der Invertierbarkeit, Diagonalisierbarkeit, etc.

Ausnahmen:

- Das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ ist gegeben durch

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{w}_j \;, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n \;. \tag{VI.3.0.A}$$

Dabei bezeichnet $\overline{}$ die komplexe Konjugation.

Konjugation bei Vertauschen der Vektoren! $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \overline{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}$.

Zwei Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ mit $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ heissen weiterhin orthogonal.

Definition der Norm eines Vektors $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{C}^n$ wie in Definition IV.1.2.A:

$$\|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |v_j|^2} \qquad \text{(Beachte: } \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}_0^+\text{)} \; .$$

$$\Rightarrow \quad \|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\| \quad \text{für alle} \quad \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \; \lambda \in \mathbb{C} \; .$$

- Anstelle des Transponierten einer Matrix verwende das konjugiert Transponierte, kenntlich gemacht durch Superskript „H":

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{H}} := \begin{bmatrix} \overline{a}_{11} & \dots & \overline{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{1m} & \dots & \overline{a}_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m,n} \; .$$

Diese Definition ist motiviert durch die Formel:

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{w} \rangle \quad \text{für alle} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,m} \; , \quad \mathbf{v} \in \mathbb{C}^m, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^m \; . \qquad \text{(VI.3.0.B)}$$

- Der Begriff der orthogonalen Matrix ($\rightarrow$ Definition IV.3.3.B) wird ersetzt durch den Begriff der unitären Matrix.

Definition VI.3.0.C (Unitäre Matrix)**.**

Eine Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *heisst unitär, wenn* $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathrm{H}}$*.*

Wegen (VI.3.0.B) beschreiben unitäre Matrizen Isometrien im $\mathbb{C}^n$ versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt (VI.3.0.A).

Bemerkung VI.3.0.M (Komplexe Matrixarithmetik in MATLAB)*.*

MATLAB rechnet automatisch mit komplexen Matrizen, wenn Einträge komplexe Werte annehmen können.

△

6.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition VI.4.0.A (Eigenwerte und Eigenvektoren)**.**
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

- *Eine Zahl* $\lambda \in \mathbb{C}$ *heisst* *Eigenwert (EW)* *der Matrix* $\mathbf{A}$, *wenn* $\operatorname{Kern}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \neq \{\mathbf{0}\}$.
- *Ein Spaltenvektor* $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *heisst* *Eigenvektor (EV)* *der Matrix* $\mathbf{A}$ *zum Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{C}$, *wenn*

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} \in \operatorname{Kern}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \ .$$

- *Ist* $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwert von* $\mathbf{A}$, *so heisst der Unterraum* $\operatorname{Kern}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ *der* *Eigenraum (ER)* *von* MA *zum Eigenwert* λ.

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

✎ Notation: $\sigma(\mathbf{A}) := \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{A}\}$ (Spektrum von $\mathbf{A}$)

▶ Wenn $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ diagonalisierbar, $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ gemäss Definition VI.2.0.A, dann sind die Diagonaleinträge von $\mathbf{D}$ *genau* die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

Für eine Funktion $\varphi : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ (diagonalisierbar):

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset D \quad \Rightarrow \quad \sigma(\varphi(\mathbf{A})) = \{\varphi(\lambda) : \ \lambda \in \sigma(\mathbf{A})\} \ .$$

Matrixfunktion, Definition VI.2.2.J

Satz VI.4.0.B (Kriterium für Diagonalisierbarkeit)**.**
Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^n$ ist genau dann diagonalisierbar im Sinn von Definition VI.2.0.A, wenn es eine Basis *des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ gibt.*

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Definition VI.4.0.C (Charakteristisches Polynom)**.**
Die Funktion

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix} , \quad \lambda \in \mathbb{C} ,$$

heisst das charakteristische Polynom der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Lemma VI.4.0.D (Charakteristisches Polynom)**.**
Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *ist ein Polynom vom Grad* $\leqslant n$ *(mit rellen Koeffizienten, falls* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$*).*

Korollar VI.4.0.E (Charakteristisches Polynome ähnlicher Matrizen)**.**
Die charakteristischen Polynome ähnlicher *Matrizen (→ Definition V.4.0.D) sind gleich: Für beliebige* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *und invertierbare* $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *gilt*

$$\chi_{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}} = \chi_{\mathbf{A}} \,.$$

▶ Das “charakteristische Polynom einer linearen Abbildung” ist ein sinnvolles Konzept (, da nicht abhängig von der Basis bzgl. derer die Matrixdarstellung der linearen Abbildung betrachtet wird.)

Satz VI.4.0.F (Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms)**.**
Das Spektrum einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *ist die Nullstellenmenge ihres charakteristischen Polynoms:*

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0\} \ .$$

► $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Satz VI.4.0.G (Spektrum von Matrix und Transponierter)**.**
Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *gilt*

$$\overline{\sigma(\mathbf{A})} = \sigma(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}) \ .$$

Relevant für stationäre Markov-Ketten, siehe Definition VI.1.0.E:

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz VI.4.0.P (Perron-Frobenius-Theorem)**.**
Für jede stochastische Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *(→ Definition VI.1.0.C) gilt:*

(i) 1 *ist der betragsgrösste Eigenwert von* $\mathbf{P}$*:* $1 \in \sigma(\mathbf{P}), 1 = \max\{|\lambda|, \ \lambda \in \sigma(\mathbf{P})\}$,

(ii) der Eigenraum zum Eigenwert 1 *ist eindimensional:* $\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{P} - \mathbf{I}) = 1$,

(iii) und es gibt einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 *mit ausschliesslich nicht-negativen Komponenten:* $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : \quad \mathbf{P}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ *und* $(\mathbf{v})_\ell \geqslant 0, \ell \in \{1, \ldots, n\}$.

LINK zu Rechenbeispielen für die Diagonalisierung von 3×3-Matrizen.

6.5 Diagonalisierbarkeit

6.5.1 Allgemeine Kriterien

Erinnerung: Kriterium für Diagonalisierbarkeit aus Satz VI.4.0.B.

Satz VI.5.1.A (Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren).
Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *seien* $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, *Eigenvektoren zu* paarweise verschiedenen *Eigenwerten. Dann ist* $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\}$ *linear unabhängig.*

Satz VI.5.1.B (Kriterien für Diagonalisierbarkeit II).
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *mit Eigenwerten* $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ *ist diagonalisierbar, wenn*

(i) sie n verschiedene *Eigenwerte hat (*$k = n$*), oder*

(ii) $\sum_{l=1}^{k} \dim \operatorname{Kern}(\mathbf{A} - \lambda_l \mathbf{I}) = n$.

Satz VI.5.1.C (Diagonalisierbarkeit und Eigenwerte von Projektionen (→ Definition V.5.0.A)).
Erfüllt $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{n,n}$*, dass* $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$*, dann ist* $\mathbf{P}$ *diagonalisierbar und* $\sigma(\mathbf{P}) \subset \{0, 1\}$.

6.5.2 Diagonalisierbarkeit normaler Matrizen

Eines der wichtigsten Resultate der linearen Algebra:

Satz VI.5.2.D (Lemma von Schur)**.**
Zu jeder Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *gibt es eine* unitäre *Matrix* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *so, dass* $\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U}$ *eine (obere)* Dreiecksmatrix *ist. Deren Diagonaleinträge sind die Eigenwerte von* $\mathbf{A}$*.*

Hilfsmittel für den Beweis:

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Satz VI.5.2.E (Fundamentalsatz der Algebra)**.**
Jedes nichtkonstante Polynom $p(z) := \alpha_k z^k + \alpha_{k-1} z^{k-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, *hat* mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ *mit* $p(z_0) = 0$*.*

Satz VI.5.2.F (Diagonalisierbarkeit von normalen Matrizen)**.**
Gilt für $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$*, dass* $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$*, dann gibt es eine* unitäre *Matrix* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *so, dass*

$$\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D} := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n,n} .$$

Die $\lambda_k \in \mathbb{C}$ *sind die Eigenwerte von* $\mathbf{A}$*, die Spalten von* $\mathbf{U}$ *die zugehörige* orthonormale *Menge von Eigenvektoren.*

Spezielle Matrizen, die mit ihrer konjugiert Transponierten vertauschbar sind:

- Symmetrische Matrizen (Hermitesche Matrizen): $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}$
- Schiefsymmetrische Matrizen: $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} = -\mathbf{A}$
- Orthogonale Matrizen: $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$
- Unitäre Matrizen: $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $\mathbf{U}^H = \mathbf{U}^{-1}$

Satz VI.5.2.G (Relle Diagonalisierbarkeit von symmetrischen Matrizen, Hauptachsentransformation)**.**

Zu jeder symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gibt es eine* orthogonale *Matrix* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *so, dass*

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n,n} .$$

Die Spalten von $\mathbf{Q}$ *bilden eine* Orthonormalbasis *des* $\mathbb{R}^n$ *aus Eigenvektoren von* $\mathbf{A}$*.*

Satz VI.5.2.H (Spektrum unitärer Matrizen)**.**

Für die Eigenwerte einer unitären *Matrix* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *(→ Definition VI.3.0.C) gilt*

$$\sigma(\mathbf{Q}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = 1\} .$$

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

Clickerfragen

Clickerfrage 6.5.1 (Autovermietung).

Eine lokale Autovermietung in Zürich führt Buch über die tägliche Bewegung ihrer Fahrzeuge zwischen den drei Standorten „HB”, „ZRH” und „ETH”:

- 40% der Fahrzeuge, die am HB ausgeliehen werden, werden an ZRH retourniert.
- 10% der Fahrzeuge, die am HB ausgeliehen werden, werden an der ETH zurückgegeben.
- 20% der Autos, die an ZRH gemietet werden, werden am HB zurückgegeben.
- 70% der Fahrzeuge, die an ZRH ausgeliehen werden, werden an der ETH zurückgebracht.
- 40% der Autos, die an der ETH gemietet werden, wandern zum HB.
- 50% der Fahrzeuge, die an der ETH ausgeliehen werden, werden an ZRH zurückgebracht.

Was ist die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten der zugehörigen stationären Markov-Kette?

(i)

$$\begin{bmatrix} 50 & 20 & 40 \\ 40 & 10 & 50 \\ 10 & 70 & 10 \end{bmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} 0.0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.0 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 0.0 \end{bmatrix}.$$

(iv)

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Clickerfrage 6.5.2 (Matrixfunktionen).

Welche der folgenden Aussagen sind für eine quadratische diagonalisierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ korrekt?

(i) $\exp(\mathbf{A})$ ist invertierbar.

(ii) $\exp(\mathbf{A}) > 0$.

(iii) $\mathbf{x}^T \exp(\mathbf{A})\mathbf{x} \geqslant 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(iv) Wenn $\sigma(\mathbf{A}) \subset \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, dann sind äquivalent

$$\sin(\mathbf{A}) \quad \text{invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \quad \text{invertierbar.}$$

(v) $\sin(\mathbf{A} + 2\pi) = \sin(\mathbf{A})$.

The End

1 Lineare Gleichungssysteme **7**

cha:lgs 1 Page: 7

1.1 Lineare Gleichungen 7

sec:lg 1.1 Page: 7

1.1.1 Definition und Notation 7

sec:lg:def 1.1.1 Page: 7
def:lgl I.1.1.A Page: 7
lgs:lg I.1.1.B Page: 7

1.1.2 Lösungen linearer Gleichungen 8

sec:lg:sol 1.1.2 Page: 8
def:lgsol I.1.2.C Page: 8
thm:lgsol I.1.2.D Page: 10
lgs:lg:2 I.1.2.E Page: 10
thm:invlgsol I.1.2.F Page: 11

1.1.3 Visualisierung von Lösungsmengen linearer Gleichungen 12

sec:lg:vis 1.1.3 Page: 12

1.2 Lineare Gleichungssysteme: Einführung 14

sec:lgsintro	1.2	Page:	14

1.2.1 Definition und Lösungsmengen 14

sec:lgs:def	1.2.1	Page:	14
def:lgs	I.2.1.A	Page:	14
lgs:lgs:1	I.2.1.B	Page:	14
def:lgssol	I.2.1.D	Page:	15
cor:lgsints	I.2.1.F	Page:	15

1.2.2 Matrixnotation 16

sec:lgs:matnot	1.2.2	Page:	16
def:matrix	I.2.2.F	Page:	16
def:rowcolvec	I.2.2.H	Page:	17
def:diag	I.2.2.J	Page:	20
lgs:matnot	I.2.2.L	Page:	21

1.3 Gausselimination 23

sec:ge	1.3	Page:	23

1.3.1 Zeilenumformungen 23

sec:ge:rowtrf	1.3.1	Page:	23

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

def:zuf	I.3.1.A	Page:	24
lgs:zuf1	I.3.1.C	Page:	24
lgs:zuf2	I.3.1.E	Page:	24
thm:invsolzuf	I.3.1.G	Page:	26

1.3.2 Zeilenstufenform 27

sec:ge:ref	1.3.2	Page:	27
def:zsf	I.3.2.A	Page:	28
eq:zsf	ZSF	Page:	28

1.3.3 Gausselimination: Algorithmus 29

sec:ge:alg	1.3.3	Page:	29
thm:zsfge	I.3.3.A	Page:	29
cor:zsfmat	I.3.3.C	Page:	29
thm:getozsf	I.3.3.C	Page:	31
cor:geinv	I.3.3.D	Page:	31
thm:zsfuniq	I.3.3.F	Page:	31
def:rank	I.3.3.H	Page:	32
ex:zsftri	I.3.3.K	Page:	32

1.3.4 Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme 33

sec:ge:sol	1.3.4	Page:	33
thm:lsesol	I.3.4.B	Page:	37
thm:lgssolex	I.3.4.D	Page:	37
thm:lgsuniq	I.3.4.E	Page:	38
thm:exrank	I.3.4.F	Page:	38
cor:lgshom	I.3.4.G	Page:	38

2 Rechnen mit Vektoren und Matrizen **39**

cha:vekmat	2	Page:	39

2.1 Vektorrechnung im n-dimensionalen Raum 39

sec:vr	2.1	Page:	39
def:vekop	II.1.0.B	Page:	39
thm:vecoprules	II.1.0.D	Page:	40
vr1	VR1	Page:	40
vr2	VR2	Page:	40
vr3	VR3	Page:	40
vr4	VR4	Page:	40
vr5	VR5	Page:	40
vr6	VR6	Page:	40
vr7	VR7	Page:	40

2.2 Linearkombinationen und Matrix-Vektor-Produkt 41

sec:lc	2.2	Page:	41
def:lk	II.2.0.A	Page:	42
lk:1	II.2.0.B	Page:	42
lk:2	II.2.0.C	Page:	42
def:mv	II.2.0.D	Page:	43
rem:lgslk	II.2.0.F	Page:	44

2.3 Matrixprodukt 46

sec:mp	2.3	Page:	46
def:mp	II.3.0.B	Page:	46
ex:ipv	II.3.0.G	Page:	50
ex:tpv	II.3.0.H	Page:	51
ex:multd	II.3.0.J	Page:	51
ex:mprc	II.3.0.K	Page:	52
thm:mpassoc	II.3.0.L	Page:	54

2.4 Matrixkalkül 54

sec:matcalc	2.4	Page:	54
def:matop	II.4.0.B	Page:	54
thm:matoprules	II.4.0.D	Page:	55

m1	M1	Page:	55
m2	M2	Page:	55
m3	M3	Page:	55
m4	M4	Page:	55
m5	M5	Page:	55
m6	M6	Page:	55
m7	M7	Page:	55
thm:mpdist	II.4.0.F	Page:	55
cor:mpdist	II.4.0.G	Page:	56

2.5 Inverse Matrix 56

sec:invmat	2.5	Page:	56
def:regmat	II.5.0.A	Page:	56
ex:inv22	II.5.0.B	Page:	57
eq:inv22	II.5.0.B	Page:	57
thm:invmat	II.5.0.C	Page:	57
thm:invcrit	II.5.0.E	Page:	58
thm:invmp	II.5.0.F	Page:	58
eq:invmp	II.5.0.G	Page:	58
thm:lgsmtrf	II.5.0.J	Page:	59

2.6 Transponierte Matrix 59

sec:trp	2.6	Page:	59
def:trp	II.6.0.A	Page:	59
thm:trp	II.6.0.C	Page:	60
eq:trp0	T1	Page:	60
eq:trp1	T2	Page:	60
eq:trp2	T3	Page:	60
eq:trp3	T4	Page:	60
thm:invtrp	II.6.0.F	Page:	61
eq:invtrp	T5	Page:	61
def:sym	II.6.0.J	Page:	61
thm:syminv	II.6.0.K	Page:	61

2.7 Blockmatrixoperationen 62

sec:blockmat	2.7	Page:	62
thm:bmp	II.7.0.B	Page:	63
ex:pfmmp	II.7.0.D	Page:	67
vm:belm	II.7.0.F	Page:	68
ex:blempf	II.7.0.H	Page:	69

3 Unterräume und Basen 70

cha:subspc	3	Page:	70

3.1 Erzeugnisse und Unterräume 71

sec:span	3.1	Page:	71
def:span	III.1.0.A	Page:	71
def:subspc	III.1.0.C	Page:	72
cor:sectspc	III.1.0.D	Page:	72
cor:spcplus	III.1.0.F	Page:	73
thm:spansub	III.1.0.G	Page:	73
spansub:1	(i)	Page:	73
spansup:2	(ii)	Page:	73
def:gensys	III.1.0.H	Page:	73
def:aff	III.1.0.J	Page:	74
thm:solsetaff	III.1.0.K	Page:	74

3.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension 75

sec:bas	3.2	Page:	75
def:lu	III.2.0.B	Page:	75
lem:la	III.2.0.C	Page:	75
lem:spanlu	III.2.0.D	Page:	76

lem:augspan	III.2.0.E	Page:	76
lem:lutrf	III.2.0.F	Page:	76
def:bas	III.2.0.G	Page:	77
cor:bas	III.2.0.H	Page:	77
thm:dim	III.2.0.J	Page:	77
def:dim	III.2.0.K	Page:	77
cor:dim	III.2.0.L	Page:	78
lem:ladim	III.2.0.M	Page:	78
thm:dimsub	III.2.0.N	Page:	78
thm:union	III.2.0.P	Page:	79

3.3 Bild und Kern von Matrizen, Dimensionssatz 79

sec:kern	3.3	Page:	79
def:kern	III.3.0.B	Page:	79
cor:kernspc	III.3.0.D	Page:	80
thm:kern	III.3.0.F	Page:	80
thm:im	III.3.0.G	Page:	81
cor:dimmat	III.3.0.H	Page:	81
thm:rankinv	III.3.0.I	Page:	81
cor:LGSaff	III.3.0.J	Page:	82
thm:gentrf	III.3.0.K	Page:	82

thm:gentrf:1	(i)	Page:	82
thm:gentrf:2	(ii)	Page:	82
cor:zufspan	III.3.0.L	Page:	83
thm:rowrank	III.3.0.M	Page:	83
thm:invkern	III.3.0.P	Page:	84
thm:invkern:1	(i)	Page:	84
thm:invkern:2	(ii)	Page:	84
thm:invkern:3	(iii)	Page:	84
thm:invkern:3a	(iv)	Page:	84
thm:invkern:4	(v)	Page:	84

3.4 Koeffizientenvektoren und Basiswechsel 85

sec:baschg	3.4	Page:	85
cor:basuniq	III.4.0.B	Page:	85
bw:1	III.4.0.C	Page:	85
def:coord	III.4.0.D	Page:	85
thm:S	III.4.0.F	Page:	86
bw:2	III.4.0.E	Page:	86
thm:baschg	III.4.0.H	Page:	86

4 Der Euklidische Raum **89**

cha:eucspc	4	Page:	89

4.1 Das Euklidische Skalarprodukt 89

sec:sp	4.1	Page:	89

4.1.1 Definition und Eigenschaften 89

sec:sp:def	4.1.1	Page:	89
def:euksp	IV.1.1.A	Page:	89
thm:spcalc	IV.1.1.C	Page:	90
esp1	ESP1	Page:	90
esp2	ESP2	Page:	90
esp3	ESP3	Page:	90
esp4	ESP4	Page:	90
cor:sp	IV.1.1.D	Page:	91
cor:trpsp	IV.1.1.F	Page:	91

4.1.2 Länge von Vektoren im n dimensionalen Raum 92

sec:sp:len	4.1.2	Page:	92
def:eno	IV.1.2.A	Page:	92
def:normv	IV.1.2.B	Page:	92

thm:csi	IV.1.2.C	Page:	92
csi	CSU	Page:	92
thm:trieq	IV.1.2.E	Page:	93
tri	△-UG	Page:	93

4.1.3 Winkel 93

sec:sp:ang	4.1.3	Page:	93
def:angle	IV.1.3.A	Page:	94
thm:cos	IV.1.3.C	Page:	95
def:orthv	IV.1.3.E	Page:	96

4.2 Abstand 97

sec:dist	4.2	Page:	97

4.2.1 Abstandsbegriff 97

sec:distdef	4.2.1	Page:	97
def:dist	IV.2.1.B	Page:	97

4.2.2 Ergänzung: Quadratische Formen 98

sec:qf	4.2.2	Page:	98
def:qf	IV.2.2.D	Page:	98

def:spd	IV.2.2.F	Page:	99
lem:spdinv	IV.2.2.H	Page:	100
lem:frsp	IV.2.2.J	Page:	100

4.2.3 Orthogonale Projektion 101

sec:op	4.2.3	Page:	101
lem:nglm	IV.2.3.K	Page:	101
thm:orthpv	IV.2.3.L	Page:	102

4.3 Orthogonalität 103

sec:orth	4.3	Page:	103

4.3.1 Orthogonale Vektoren 103

sec:orthvec	4.3.1	Page:	103
def:orthvec	IV.3.1.A	Page:	103
thm:orthlu	IV.3.1.C	Page:	103
thm:pyth	IV.3.1.D	Page:	104

4.3.2 Orthogonale Komplemente 104

sec:orthcomp	4.3.2	Page:	104
def:orthcomp	IV.3.2.B	Page:	104

`cor:orthcomp`	IV.3.2.D	Page:	105
`thm:orthcomp`	IV.3.2.F	Page:	105

4.3.3 Orthogonale Matrizen 105

`sec:on`	4.3.3	Page:	105
`def:orthmat`	IV.3.3.B	Page:	105
`cor:orthgrp`	IV.3.3.D	Page:	106
`lem:orthlen`	IV.3.3.F	Page:	106

4.3.4 Orthogonalisierung 107

`sec:gs`	4.3.4	Page:	107
`lem:oponb`	IV.3.4.A	Page:	107
`gsorth:span`	IV.3.4.C	Page:	108
`thm:gsquit`	IV.3.4.D	Page:	109
`thm:qr`	IV.3.4.F	Page:	109
`eq:ecoqr`	IV.3.4.H	Page:	110
`eq:fullqr`	IV.3.4.J	Page:	110

4.3.5 Vektorprodukt 111

`sec:vp`	4.3.5	Page:	111
`def:vp`	IV.3.5.A	Page:	111

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

thm:vporth	IV.3.5.C	Page:	111
vp1	VP1	Page:	111
thm:vplen	IV.3.5.E	Page:	112
vp2	VP2	Page:	112
thm:vprules	IV.3.5.G	Page:	113
vp3	VP3	Page:	113
vp4	VP4	Page:	113
vp5	VP5	Page:	113
vp6	VP6	Page:	113

4.4 Lineare Ausgleichsrechnung 114

sec:lsq	4.4	Page:	114

4.4.1 Überbestimmte lineare Gleichungssysteme: Beispiele 114

sec:ods	4.4.1	Page:	114
cor:odlse	IV.4.1.A	Page:	114

4.4.2 Kleinste-Quadrate Lösung 115

sec:lsqsol	4.4.2	Page:	115
def:lsqsol	IV.4.2.B	Page:	115
eq:lsqsol	IV.4.2.C	Page:	115

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

4.4.3 Normalengleichungen 116

`sec:ne`	4.4.3	Page:	116
`thm:ngl`	IV.4.3.B	Page:	116
`ex:reg`	IV.4.3.D	Page:	116
`cor:nglm`	IV.4.3.F	Page:	117

4.4.4 Orthogonalisierungstechniken 118

`sec:qr`	4.4.4	Page:	118
`thm:lsqqr`	IV.4.4.B	Page:	119

4.5 Volumenformen und Determinanten 120

`sec:det`	4.5	Page:	120

4.5.1 Volumen 120

`sec:vol`	4.5.1	Page:	120
`vol:2d`	IV.5.1.V	Page:	122
`def:vol`	IV.5.1.A	Page:	123

4.5.2 Determinanten 124

`sec:det`	4.5.2	Page:	124
`def:det`	IV.5.2.A	Page:	124

cor:detlin	IV.5.2.X	Page:	125
cor:detinv	IV.5.2.B	Page:	125
cor:detsign	IV.5.2.C	Page:	125
thm:detla	IV.5.2.D	Page:	126

4.5.3 Determinantenformeln 126

sec:detform	4.5.3	Page:	126
thm:detfix	IV.5.3.E	Page:	126
def:detn	IV.5.3.F	Page:	127
def:matdet	IV.5.3.G	Page:	127
eq:detblock	IV.5.3.L	Page:	129
thm:dettrp	IV.5.3.H	Page:	129
thm:detinv	IV.5.3.I	Page:	130

4.5.4 Determinante und Matrixprodukt 130

sec:detmp	4.5.4	Page:	130
thm:detmul	IV.5.4.J	Page:	130
ex:detalg	IV.5.4.K	Page:	131

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

5 Lineare Abbildungen 137

cha:vsp	5	Page:	137
rotvisualization	5.1	Page:	138

5.1 Wiederholung: Vektoren und Koordinaten 139

sec:koord	5.1	Page:	139
def:coordmap	V.1.0.A	Page:	141

5.2 Konzept der linearen Abbildung 142

sec:labbbasics	5.2	Page:	142
def:Lmap	V.2.0.A	Page:	142
L1	L1	Page:	142
L2	L2	Page:	142
ex:1dlin	V.2.0.B	Page:	143
ex:matlin	V.2.0.C	Page:	143
lm:1	V.2.0.E	Page:	144
thm:lmprop	V.2.0.L	Page:	145
def:seg	V.2.0.M	Page:	146
cor:segmap	V.2.0.P	Page:	146
linmapvis1	1	Page:	147
linmapvis	5.2	Page:	148

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

thm:lincomp	V.2.0.F	Page:	149
def:lmkern	V.2.0.G	Page:	150
thm:lmsubspc	V.2.0.J	Page:	150
def:lmrank	V.2.0.K	Page:	151
def:affmap	V.2.0.Q	Page:	151
ex:1daff	V.2.0.T	Page:	152

5.3 Matrixdarstellung 153

sec:labbmat	5.3	Page:	153

5.3.1 Definition 153

sec:deflabmat	5.3.1	Page:	153
thm:lmbas	V.3.1.B	Page:	153
42C	V.3.1.C	Page:	153
thm:vc	V.3.1.D	Page:	154
thm:lmis	V.3.1.G	Page:	155
thm:lmmatsub	V.3.1.H	Page:	156
thm:lmcomp	V.3.1.J	Page:	157

5.3.2 Matrixdarstellung bei Basiswechsel 157

sec:chglabmat	5.3.2	Page:	157

lm:RS	V.3.2.A	Page:	158
thm:labmatchg	V.3.2.B	Page:	159

5.4 Lineare Selbstabbildungen 159

sec:end	5.4	Page:	159
thm:endtrf	V.4.0.B	Page:	160
def:simmat	V.4.0.D	Page:	160

5.5 Projektionen 161

sec:prj	5.5	Page:	161
def:prj	V.5.0.A	Page:	161
thm:prijinv	V.5.0.B	Page:	161
def:dirsum	V.5.0.C	Page:	162
cor:dirsum	V.5.0.D	Page:	162
thm:prjdec	V.5.0.D	Page:	162
thm:prjmat	V.5.0.G	Page:	163
def:op	V.5.0.I	Page:	164
thm:opspc	V.5.0.J	Page:	165
cor:oponb	V.5.0.K	Page:	165

5.6 Isometrien im Euklidischen Raum 166

sec:iso	5.6	Page:	166

5.6.1 Lägenerhaltung 166

sec:iso2	5.6.1	Page:	166
def:iso	V.6.1.A	Page:	166
thm:isokern	V.6.1.C	Page:	166
thm:isoang	V.6.1.D	Page:	167
thm:isoorth	V.6.1.F	Page:	168

5.6.2 Spiegelungen 168

sec:refl	5.6.2	Page:	168
def:refl	V.6.2.G	Page:	169
thm:isorefl	V.6.2.J	Page:	169

5.6.3 Drehungen 170

sec:rot	5.6.3	Page:	170

5.6.3.1 Drehungen im $\mathbb{R}^2$ 170

def:rot2d	V.6.3.K	Page:	170
thm:rot2d	V.6.3.K	Page:	170

5.6.3.2 Drehungen im $\mathbb{R}^3$ 172

def:rot3d	V.6.3.L	Page:	172
rotmatrix	5.3	Page:	174

6 Diagonalisierung **175**

cha:evp	6	Page:	175

6.1 Motivation: Lineare Rekursionen 175

sec:linrec	6.1	Page:	175
ex:age	VI.1.0.P	Page:	175
agestuct	6.1	Page:	176
eq:pagerank	VI.1.0.Q	Page:	177
prpowitsim	6.2	Page:	179
def:linrec	VI.1.0.A	Page:	180
def:stochmat	VI.1.0.C	Page:	180
def:mc	VI.1.0.E	Page:	181
eq:dynsys	VI.1.0.S	Page:	183
movingparticle	6.3	Page:	183
def:mtr	VI.1.0.T	Page:	185

6.2 Matrixdiagonalisierung 186

sec:diagmat	6.2	Page:	186
def:diagbar	VI.2.0.A	Page:	186

6.2.1 Anwendung: Geschlossene Darstellung linearer Rekursionen 187

sec:linrefform	6.2.1	Page:	187
thm:linrecform	VI.2.1.K	Page:	187
thm:linrecgrow	VI.2.1.N	Page:	188

6.2.2 Anwendung: Matrixfunktionen 189

sec:matfunk	6.2.2	Page:	189
def:matpol	VI.2.2.C	Page:	189
thm:matpoldiag	VI.2.2.E	Page:	190
def:matexp	VI.2.2.G	Page:	191
eq:matfunc	VI.2.2.H	Page:	191
def:matfunc	VI.2.2.J	Page:	192
eq:matfunc1	VI.2.2.H	Page:	192

6.3 Rechnen im n-dimensionalen complexen Raum 192

sec:Cn	6.3	Page:	192
ESPC	VI.3.0.A	Page:	193
53B	VI.3.0.B	Page:	194
def:unitmat	VI.3.0.C	Page:	195
rem:cmatmatlab	VI.3.0.M	Page:	195

6.4 Eigenwerte und Eigenvektoren 196

sec:ev	6.4	Page:	196
def:ew	VI.4.0.A	Page:	196
thm:diagbar	VI.4.0.B	Page:	197
def:charpol	VI.4.0.C	Page:	197
lem:charpol	VI.4.0.D	Page:	198
cor:simcp	VI.4.0.E	Page:	198
thm:ewzeros	VI.4.0.F	Page:	199
thm:spectrp	VI.4.0.G	Page:	199
thm:pf	VI.4.0.P	Page:	200

6.5 Diagonalisierbarkeit 200

sec:diagbar	6.5	Page:	200

6.5.1 Allgemeine Kriterien 200

sec:diagkrit	6.5.1	Page:	200
thm:luev	VI.5.1.A	Page:	201
thm:diagbardiffev	VI.5.1.B	Page:	201
thm:diagprj	VI.5.1.C	Page:	201

6.5.2 Diagonalisierbarkeit normaler Matrizen 202

sec:diagnorm	6.5.2	Page:	202

R. Hiptmair
SAM, ETHZ

`thm:schur`	VI.5.2.D	Page:	202
`thm:fundalg`	VI.5.2.E	Page:	202
`thm:normdiag`	VI.5.2.F	Page:	203
`thm:diagsym`	VI.5.2.G	Page:	204
`thm:unspec`	VI.5.2.H	Page:	204

Index **208**

Begriffe 208

Beispiele 208

Definitionen 208

MATLAB-Programme 208

Symbole und Bezeichnungen 208

R. Hiptmair
SAM, ETHZ