P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Endsemesterprüfung HS15, Typ A

Name		Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	10.12.2015	

1	2	3	4	5	6	Total
1P	1P	1P	1P	1P	1P	6P

- **Nur Stifte und Legi auf dem Tisch!**
- Mobiltelefone, Tablets, etc. **ausgeschaltet** in der Tasche
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**
- Geben Sie zu jeder Lösung auch den **Lösungsweg / eine Begründung** an, sonst erhalten Sie unter Umständen nicht die volle Punktzahl.
- Prüfungsdauer: **30 Minuten**. Sie sollten Zeit für das Übertragen der Lösungen auf das Aufgabenblatt einplanen, falls Sie andere Blätter verwenden.
- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus (ohne die Box mit den Punkten, bitte ☺).

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Winkel und Kreuzprodukt [1 Punkt]

Wir betrachten die zwei Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(1a) [0.5 Punkte] Was ist der Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$?

Tipp: Es gilt

$$\begin{aligned} &\sin(0) = 0, \quad \sin(\pi/6) = 1/2, \quad \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \quad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2, \quad \sin(\pi/2) = 1, \quad \sin(\pi) = 0, \\ &\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2, \quad \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \quad \cos(\pi/3) = 1/2, \quad \cos(\pi/2) = 0, \quad \cos(\pi) = -1. \end{aligned}$$

Lösung: Wir berechnen

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{3 - 2 + 6}{1 + 4 + 9} = \frac{1}{2}.$$

Also ist $\varphi = \arccos(1/2) = \pi/3 = 60°$.

(1b) [0.5 Punkte] Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

Lösung: Wir berechnen

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 Orthogonalität und Projektion [1 Punkt]

(2a) [0.5 Punkte] Ist

$$\mathbf{Q} := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

eine orthogonale Matrix?

Lösung: Wir berechnen

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \mathbf{I} \neq \mathbf{I},$$

also ist $\mathbf{Q}$ nicht orthogonal.

(2b) [0.5 Punkte] Nun betrachten wir

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4/5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

Ist die lineare Abbildung $\mathcal{P} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ durch $\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x}$ gegeben ist, eine Projektion?

Lösung: Es gilt

$$\mathbf{PP} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4/5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4/5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

Also gilt für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Kern}(\mathbf{P})$, dass $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \neq \mathcal{P}(\mathbf{x})$, insbesondere zum Beispiel für $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Somit ist $\mathcal{P}$ keine Projektion.

Aufgabe 3 Linearität von Abbildungen [1 Punkt]

(3a) [0.5 Punkte] Ist die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ durch $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ gegeben ist, eine lineare Abbildung?

Tipp: Überprüfen Sie, ob $\mathcal{F}$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\mathcal{F}(\alpha \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathcal{F}(\mathbf{x}) + \mathcal{F}(\mathbf{y})$$

erfüllt, oder finden Sie ein Beispiel für $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ und α, für welches diese nicht erfüllt ist.

Lösung: Nein, denn es gilt für alle $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\mathcal{F}(\mathbf{x} + \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} + \mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{x} \rangle = 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \neq 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathcal{F}(\mathbf{x}) + \mathcal{F}(\mathbf{x}).$$

Für jedes $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ist also die Wahl $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{x}_0$, $\alpha = 1$ ein Gegenbeispiel.

(3b) [0.5 Punkte] Bezeichne $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, wie gewohnt, den Raum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich drei. Ist die Abbildung $\mathcal{D}\colon \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, die für alle $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ durch $\mathcal{D}(p(x)) = p''(x)$ gegeben ist, eine lineare Abbildung?

Lösung: Ja, denn aufgrund der Linearität der Ableitung gilt für alle $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dass

$$\mathcal{D}(\alpha \cdot p(x) + q(x)) = (\alpha \cdot p(x) + q(x))'' = \alpha \cdot p''(x) + q''(x) = \alpha \cdot \mathcal{D}(p(x)) + \mathcal{D}(q(x)).$$

Aufgabe 4 Abbildungsmatrix [1 Punkt]

Sei $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die für alle $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathcal{L}\big(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\big) = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$$

gegeben ist.

(4a) [0.5 Punkte] Was ist die Abbildungsmatrix $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{L})$ von $\mathcal{L}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}\} = \big\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\big\}$ des $\mathbb{R}^2$?

Lösung: Wir berechnen die Bilder der Standardbasisvektoren und erhalten

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}^{(1)}) = \mathcal{L}\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\big) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathcal{L}(\mathbf{e}^{(2)}) = \mathcal{L}\big(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\big) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Es folgt

$$\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4b) **[0.5 Punkte]** Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$ von $\mathcal{L}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(1)}\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right\}$ des $\mathbb{R}^2$.

Lösung: Wir sehen, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{e}^{(2)}) &= \mathcal{L}\big(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\big) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = 0 \cdot \mathbf{e}^{(2)} + 1 \cdot \mathbf{e}^{(1)},\\ \mathcal{L}(\mathbf{e}^{(1)}) &= \mathcal{L}\big(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\big) = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right) = -1 \cdot \mathbf{e}^{(2)} + 0 \cdot \mathbf{e}^{(1)}.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 Determinante [1 Punkt]

Wir betrachten die Familie

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

von Matrizen mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

(5a) **[0.5 Punkte]** Berechnen Sie $\det \mathbf{A}(\alpha)$ in Abhängigkeit von α.

Lösung: Es gilt

$$\det \mathbf{A}(\alpha) = \det \begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 1 & 1\end{pmatrix} = 1 - \alpha.$$

(5b) **[0.5 Punkte]** Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{A}(\alpha)$ invertierbar?

Lösung: $\mathbf{A}(\alpha)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det \mathbf{A}(\alpha) = 1 - \alpha \neq 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Aufgabe 6 Isometrie [1 Punkt]

Wir betrachten die Matrix

$$\mathbf{K} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}.$$

Ist die lineare Abbildung $\mathcal{K}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ durch $\mathcal{K}(\mathbf{x}) = \mathbf{K}\mathbf{x}$ gegeben ist, eine Isometrie?

Lösung: Ja. Wir berechnen

$$\mathbf{K}^\top\mathbf{K} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

Weil $\mathbf{K}$ die Abbildungsmatrix von $\mathcal{K}$ bezüglich den Standardbasen des $\mathbb{R}^2$ beziehungsweise des $\mathbb{R}^3$ ist, folgt aus der Vorlesung, dass $\mathcal{K}$ eine Isometrie ist.