P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Mittsemesterprüfung HS15, Typ A

Name		Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	29.10.2015	

1	2	3	4	5	6	Total
1P	1P	1P	1P	1P	1P	6P

- **Nur Stifte und Legi auf dem Tisch!**
- Mobiltelefone, Tablets, etc. **ausgeschaltet** in der Tasche
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**
- Prüfungsdauer: **30 Minuten**. Sie sollten Zeit für das Übertragen der Lösungen auf das Aufgabenblatt einplanen, falls Sie andere Blätter verwenden.
- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus (ohne die Box mit den Punkten bitte ☺).

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Zeilenstufenform [1 Punkt]

Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 7x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3. \end{aligned}$$

(1a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform des Gleichungssystems (das heisst, die Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix).

Lösung von (1a):

(1b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Lösung von (1b):

Aufgabe 2 Matrixprodukt [1 Punkt]

Wir betrachten die folgenden Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,3}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1,2}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2a) Ist das Matrixprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ definiert? Falls ja, berechnen Sie es.

Lösung von (2a):

(2b) Ist das Matrixprodukt $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ definiert? Falls ja, berechnen Sie es.

Lösung von (2b):

(2c) Ist das Matrixprodukt $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ definiert? Falls ja, berechnen Sie es.

Lösung von (2c):

Aufgabe 3 Inverse berechnen [1 Punkt]

Die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 2.4 & -2.8 & -0.6 \\ -1.6 & 2.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Aus Zeitgründen lösen Sie diese Aufgabe am besten ohne Gaussalgorithmus.

Lösung:

Aufgabe 4 Lineare Abhängigkeit [1 Punkt]

Bestimmen Sie, ob die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear abhängig oder linear unabhängig sind. Geben Sie eine Begründung an.

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Aufgabe 5 Basisvektoren [1 Punkt]

Betrachten Sie vier beliebige Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)}, \mathbf{a}^{(4)} \in \mathbb{R}^3$. Können diese eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Aufgabe 6   Bild und Kern einer Matrix [1 Punkt]

Wir betrachten die Matrix
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$
Bestimmen Sie Bild und Kern von $\mathbf{A}$.

Lösung: