P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Mittsemesterprüfung HS15, Typ A

Name		Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	29.10.2015	

1	2	3	4	5	6	Total
1P	1P	1P	1P	1P	1P	6P

- **Nur Stifte und Legi auf dem Tisch!**
- Mobiltelefone, Tablets, etc. **ausgeschaltet** in der Tasche
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**
- Prüfungsdauer: **30 Minuten**. Sie sollten Zeit für das Übertragen der Lösungen auf das Aufgabenblatt einplanen, falls Sie andere Blätter verwenden.
- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus (ohne die Box mit den Punkten bitte ☺).

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Zeilenstufenform [1 Punkt]

Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 7x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3. \end{aligned}$$

(1a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform des Gleichungssystems (das heisst, die Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix).

Lösung von (1a):

Lösung: Wir machen Zeilenumformungen wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right)$$

Die Zeilenstufenform lautet somit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right).$$

(1b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Lösung von (1b):

Lösung: Aus der Zeilenstufenform in der ersten Teilaufgabe lesen wir ab

$$\mathcal{L}(\mathrm{LGS}) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\alpha \\ \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 2 Matrixprodukt [1 Punkt]

Wir betrachten die folgenden Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,3}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2,2}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1,2}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2a) Ist das Matrixprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ definiert? Falls ja, berechnen Sie es.

Lösung von (2a):

Lösung: Das geht nicht. Das Matrixprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ist nicht bestimmt, da die "inneren Dimensionen" der beiden Matrizen nicht übereinstimmen.

(2b) Ist das Matrixprodukt $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ definiert? Falls ja, berechnen Sie es.

Lösung von (2b):

Lösung:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 24 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(2c) Ist das Matrixprodukt $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ definiert? Falls ja, berechnen Sie es.

Lösung von (2c):

Lösung:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 24 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 Inverse berechnen [1 Punkt]

Die Inverse der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 2.4 & -2.8 & -0.6 \\ -1.6 & 2.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Aus Zeitgründen lösen Sie diese Aufgabe am besten ohne Gaussalgorithmus.

Lösung:

Lösung: Die Matrix $\mathbf{B}$ entspricht genau der Transponierten der Matrix $\mathbf{A}$. Wegen $(\mathbf{A}^{-1})^\top \mathbf{B} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^\top = \mathbf{I}$ ist die Inverse von $\mathbf{B}$ also gerade durch die Transponierte von $\mathbf{A}^{-1}$ gegeben:

$$\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top = \begin{pmatrix} 0.2 & 2.4 & -1.6 \\ -0.4 & -2.8 & 2.2 \\ 0.2 & -0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 Lineare Abhängigkeit [1 Punkt]

Bestimmen Sie, ob die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear abhängig oder linear unabhängig sind. Geben Sie eine Begründung an.

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Lösung: Betrachte die k Vektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ im Vektorraum V.

$a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ sind **linear unabhängig**, falls aus $x_1 a^{(1)} + \cdots + x_k a^{(k)} = 0$ folgt, dass $x_1 = \cdots = x_k = 0$ gilt. Sonst heissen sie **linear abhängig**.

Somit sind die Vektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ genau dann linear unabhängig, wenn das zugehörige homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ mit $A = [a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}]$ nur die triviale Lösung $x = 0$ hat. Nach einem Satz aus der Vorlesung ist dies äquivalent zu $r = k$, wobei r den Rang der Matrix A bezeichnet.

In dieser Aufgabe ist $V = \mathbb{R}^n$ (mit $n = 3$) und wir können die Bestimmung der linearen Abhängigkeit mit Hilfe vom Gaussverfahren systematisieren:
Schreibe $A = [a^{(1)} \ldots a^{(k)}]$. A ist eine $n \times k-$Matrix, wobei n die Anzahl Zeilen ist. Mit dem Gauss-Algorithmus können wir $r = \text{Rang}\, A$ bestimmen.

Es gilt: Die Vektoren $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$ sind:

- linear unabhängig, falls $r = k$.
- linear abhängig, falls $r < k$.

In unserem Fall lautet die Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass das $\mathbf{A}$ bereits in Zeilenstufenform ist und die Matrix Rang 2 hat. Damit hat $\mathbf{A}$ keinen vollen Spaltenrang und die Vektoren sind linear abhängig.

Aufgabe 5 Basisvektoren [1 Punkt]

Betrachten Sie vier beliebige Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)}\mathbf{a}^{(4)} \in \mathbb{R}^3$. Können diese eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine Menge von Vektoren genau dann eine Basis eines Vektorraums bildet, wenn diese linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem des Raumes bilden. Die Anzahl Basiselemente einer Basis entspricht immer der Dimension des Raumes. Weil der $\mathbb{R}^3$ Dimension 3 hat, können vier Vektoren also nie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 6 Bild und Kern einer Matrix [1 Punkt]

Wir betrachten die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

als eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie Bild und Kern der Abbildung.

Lösung:

Lösung: Der Kern einer Abbildung $\mathbf{A}$ ist die Menge der Vektoren $\mathbf{x}$, für die $\mathbf{Ax} = 0$ gilt. In diesem Fall ist das die Menge $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$. Das Bild einer Abbildung ist die Menge aller Vektoren $\mathbf{y}$, so dass ein Vektor $\mathbf{x}$ existiert, für den $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$. Somit ist $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.