P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Nachholprüfung Endterm HS15

Name		Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	04.02.2016	

1	2	3	4	5	6	Total
1P	1P	1P	1P	1P	1P	6P

- **Nur Stifte und Legi auf dem Tisch!**
- Mobiltelefone, Tablets, etc. **ausgeschaltet** in der Tasche
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**
- Geben Sie zu jeder Lösung auch den **Lösungsweg / eine Begründung** an, sonst erhalten Sie unter Umständen nicht die volle Punktzahl.
- Prüfungsdauer: **30 Minuten**. Sie sollten Zeit für das Übertragen der Lösungen auf das Aufgabenblatt einplanen, falls Sie andere Blätter verwenden.
- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus (ohne die Box mit den Punkten, bitte ☺).

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Winkel und Kreuzprodukt [1 Punkt]

Wir betrachten die Vektoren

$$\mathbf{a}[t] = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(1a) **[0.5 Punkte]** Berechnen Sie $t \in \mathbb{R}$, so dass der Winkel zwischen $\mathbf{a}[t]$ und $\mathbf{b}$ genau $45^\circ = \pi/4$ beträgt.

Tipp: Es gilt $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

Lösung:

(1b) **[0.5 Punkte]** Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\mathbf{c} = (\mathbf{a}[-1]) \times \mathbf{b}$ von $\mathbf{a}[-1]$ und $\mathbf{b}$.

Lösung:

Aufgabe 2 Orthogonalprojektion und Spiegelung [1 Punkt]

Gegeben sei der Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(2a) **[0.5 Punkte]** Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{P_x} \in \mathbb{R}^{3,3}$ der Orthogonalprojektion auf $\mathbf{x}$, das heisst, dass für jedes $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ der Vektor $\mathbf{P_x y} \in \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion von $\mathbf{y}$ auf $\mathbf{x}$ ist.

Lösung:

(2b) **[0.5 Punkte]** Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{S_x} \in \mathbb{R}^{3,3}$ der Spiegelung an $\mathbf{x}$, das heisst, dass für jedes $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ der Vektor $\mathbf{S_x y} \in \mathbb{R}^3$ die Spiegelung von $\mathbf{y}$ an $\mathbf{x}$ ist.

Lösung:

Aufgabe 3 Linearität von Abbildungen [1 Punkt]

(3a) **[0.5 Punkte]** Ist die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ durch $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \|x\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ gegeben ist, eine lineare Abbildung?

Tipp: Überprüfen Sie, ob $\mathcal{F}$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\mathcal{F}(\alpha \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathcal{F}(\mathbf{x}) + \mathcal{F}(\mathbf{y})$$

erfüllt, oder finden Sie ein Beispiel für $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ und α, für welches diese nicht erfüllt ist.

Lösung:

(3b) **[0.5 Punkte]** Bezeichne $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, wie gewohnt, den Raum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich drei. Ist die Abbildung $\mathcal{D}\colon \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, die für alle $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ durch $\mathcal{D}(p(x)) = p'(x) - 2p(x)$ gegeben ist, eine lineare Abbildung?

Lösung:

Aufgabe 4 Abbildungsmatrix [1 Punkt]

Sei $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die für alle $\mathbf{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathcal{L}\Big(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\Big) = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$$

gegeben ist.

(4a) **[0.5 Punkte]** Was ist die Abbildungsmatrix $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{L})$ von $\mathcal{L}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ des $\mathbb{R}^2$?

Lösung:

(4b) **[0.5 Punkte]** Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathcal{L})$ von $\mathcal{L}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(1)}\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ des $\mathbb{R}^2$.

Lösung:

Aufgabe 5 Determinante [1 Punkt]

Wir betrachten die Matrix
$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

(5a) **[0.5 Punkte]** Berechnen Sie $\det \mathbf{A}$.

Lösung:

(5b) **[0.5 Punkte]** Berechnen Sie $\det(\mathbf{A}^{-1})$.

Lösung:

Aufgabe 6 Isometrie [1 Punkt]

Wann nennen wir eine lineare Abbildung $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Isometrie? Geben Sie eine rigorose Definition an.

Lösung: