P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Nachholprüfung der Midterm HS15

Name		Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	04.02.2016	

1	2	3	4	5	6	Total
1P	1P	1P	1P	1P	1P	6P

- **Nur Stifte und Legi auf dem Tisch!**
- Mobiltelefone, Tablets, etc. **ausgeschaltet** in der Tasche
- **Das Deckblatt darf erst auf Anweisung umgeblättert werden!**
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Zugelassene Hilfsmittel: Keine.
- **Schreiben Sie Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder.**
- Geben Sie zu jeder Lösung auch den **Lösungsweg / eine Begründung** an, sonst erhalten Sie unter Umständen nicht die volle Punktzahl.
- Prüfungsdauer: **30 Minuten**. Sie sollten Zeit für das Übertragen der Lösungen auf das Aufgabenblatt einplanen, falls Sie andere Blätter verwenden.
- Bitte füllen Sie zuerst das Deckblatt aus (ohne die Box mit den Punkten, bitte ☺).

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Zeilenstufenform [1 Punkt]

Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrl} 3x_1 & + & 5x_2 & - & 8x_3 & = 9, \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = 3, \\ 3x_1 & + & x_2 & & & = -3. \end{array}$$

(1a) Bestimmen Sie die Zeilenstufenform des Gleichungssystems (das heisst, die Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix).

Lösung von (1a):

(1b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

Lösung von (1b):

Aufgabe 2 Matrixprodukt [1 Punkt]

Wir betrachten die folgenden Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,3}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3,2}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1,2}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2a) Ist das Matrixprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ definiert? Falls ja, berechnen Sie es.

Lösung von (2a):

(2b) Ist das Matrixprodukt $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ definiert? Falls ja, berechnen Sie es.

Lösung von (2b):

(2c) Ist das Matrixprodukt $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ definiert? Falls ja, berechnen Sie es.

Lösung von (2c):

Aufgabe 3 Inverse berechnen [1 Punkt]

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{2,2}$ gegeben durch

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $[\mathbf{A}(t)]^{-1} \in \mathbb{R}^{2,2}$.

Lösung:

Aufgabe 4 Lineare Abhängigkeit [1 Punkt]

Bestimmen Sie, ob die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear abhängig oder linear unabhängig sind. Geben Sie eine Begründung an.

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Aufgabe 5 Basisvektoren [1 Punkt]

Betrachten Sie vier beliebige Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)}, \mathbf{a}^{(4)} \in \mathbb{R}^2$. Können diese eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Aufgabe 6 Bild und Kern einer Matrix [1 Punkt]

Wir betrachten die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ und eine Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

Lösung: