Serie 8

1. Definiere

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} .$$

a) Verifiziere $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$.

b) Verifiziere $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

c) Berechne $\cos z \sin z$ aus **a** und **b**.

d) Berechne $\frac{\sin(2z)}{2}$ aus **b**.

2. Vereinfache soweit wie möglich

a) $(1-z)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$,

b) $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$,

c) $\displaystyle(1-z-z^2)\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n\right)$,

wobei F_n die Fibonacci Folge ist: $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

3. **a)** Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{1-z-z^2}$$

b) Sei $\psi_1 := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der goldene Schnitt. Sei $\psi_2 := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Entwickle

$$\frac{\psi_1}{1-z\psi_1}, \qquad \text{und} \qquad \frac{\psi_2}{\psi_2 z - 1}$$

in Potenzreihen.

Bitte wenden!

c) Schließe

$$F_n = \frac{(\psi_1)^{n+1} - (\psi_2)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Montag, 16.11.2015, in der Übungsstunde.

Vorlesungshomepage: `http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2015/other/mathematik1_CHAB`