Lösung 1

1. Bestimme den Real- und Imaginärteil, Absolutbetrag und das komplex Konjugierte von

a) $2+i$,

Lösung. Hier ist $\mathrm{Re}(z)=2$, $\mathrm{Im}(z)=1$, $\bar{z}=2-i$ und $|z|=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$.

b) $(2+i)^2$,

Lösung. $z=(2+i)^2=2^2+2\cdot 2\cdot i+(i)^2=4+4i-1=3+4i$. Also $\mathrm{Re}(z)=3$ und $\mathrm{Im}(z)=4$. Es folgt $\bar{z}=3-4i$, $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

c) $(2+i)^3$,

Lösung. $z=(2+i)^3=(2+i)(2+i)^2=(2+i)(3+4i)=6+8i+3i+4(i)^2$. So $z=2+11i$. Also $\mathrm{Re}(z)=2$, und $\mathrm{Im}(z)=11$. Es folgt $\bar{z}=2-11i$, $|z|=\sqrt{2^2+11^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$.

d) $(3+i)(5-2i)$.

Lösung. $z=(3+i)(5-2i)=15-6i+5i-2(i)^2=17-i$. Also $\mathrm{Re}(z)=17$, und $\mathrm{Im}(z)=-1$. Es folgt $\bar{z}=17+i$, $|z|=\sqrt{1^2+17^2}=\sqrt{290}$.

e) $\dfrac{(3+4i)}{(2+i)}$.

Lösung. Aus b) wissen wir, dass $\frac{3+4i}{2+i}=2+i$ ist, oder rechne direkt

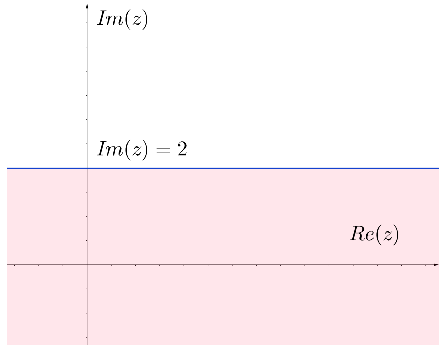
$$\frac{(3+4i)}{(2+i)}=\frac{(3+4i)}{(2+i)}\frac{(2-i)}{(2-i)}=\frac{10+5i}{2^2+1}=2+i.$$

Für Real-, Imaginärteil usw. siehe Punkt a).

2. Zeichne die folgenden Gebiete in der komplexen Ebene ein

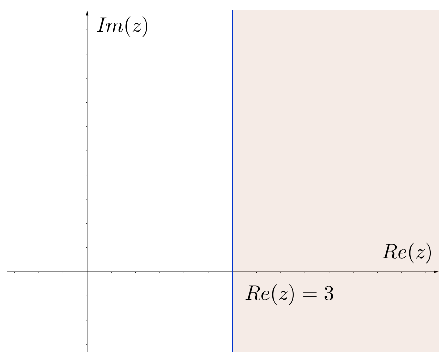
a) $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}(z)<2\}$

Lösung. Das Gebiet ist definiert durch den roten Teil des Bildes. Die blaue Linie $\mathrm{Im}\,(z)=2$ ist **nicht** im Gebiet enthalten.



b) $\{z \in \mathbb{C} \, : \, \mathrm{Re}(z) > 3\}$

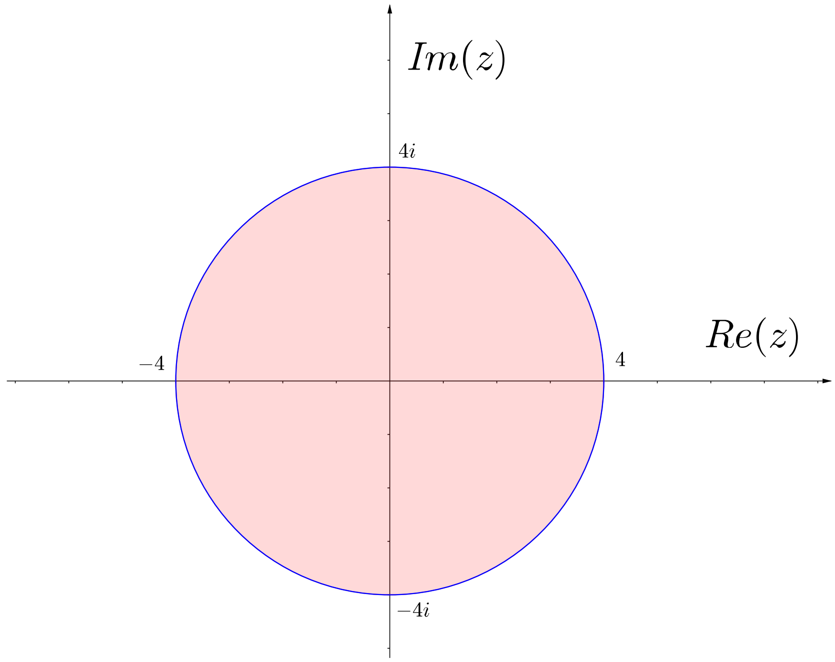
Lösung. Das Gebiet ist definiert durch den roten Teil des Bildes. Die blaue Linie $\mathrm{Re}\,(z) = 3$ ist **nicht** im Gebiet enthalten.



c) $\{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| < 4\}$

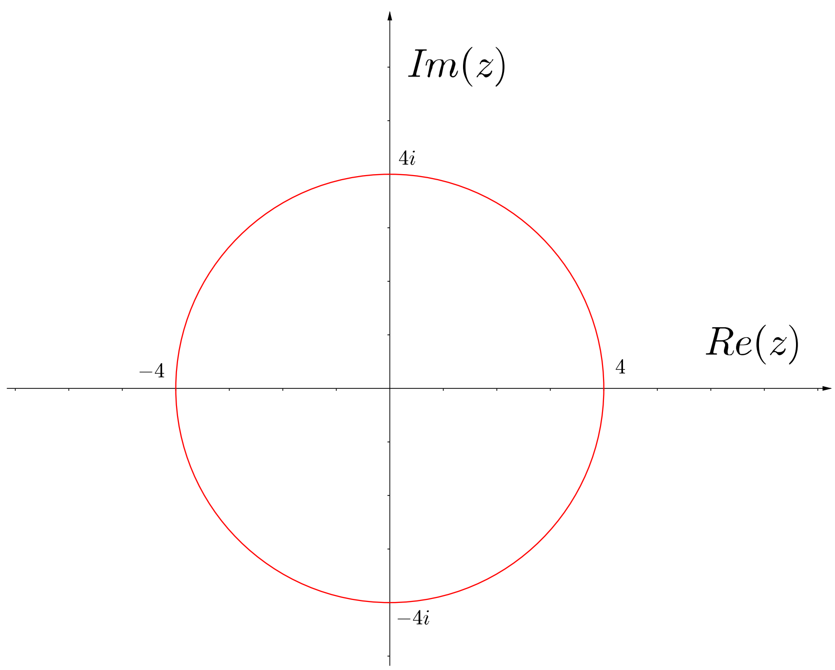
Lösung. Das Gebiet ist definiert durch den roten Teil des Bildes. Der blaue Kreis $|z| = 4$ ist **nicht** im Gebiet enthalten.

Siehe nächstes Blatt!



d) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 4\}$.

Lösung. Das Gebiet ist der Kreis um 0 mit Radius 4.



Bitte wenden!

3. Finde alle z mit $z^2 = 2i$.

Lösung. Wir schreiben $z = a + ib$, wobei a, b reelle Zahlen sind. Dann wird die Gleichung zu

$$z^2 = (a + ib)^2 = a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + 2aib + -b^2 = 2i.$$

So erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2iab = 2i \end{cases}$$

Aus $2iab = 2i$ erhalten wir $ab = 1$, d.h. $a \neq 0$, $b \neq 0$. Also können wir die Substitution $a = \frac{1}{b}$ anwenden. Die erste Gleichung wird zu

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 0 \\ \frac{1}{b^2} - b^2 &= 0 \\ \frac{1}{b^2} &= b^2 \\ 1 &= b^4. \end{aligned}$$

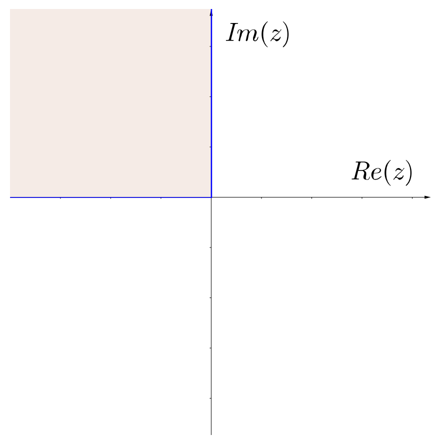
Also haben wir zwei Lösungen: $b = \pm 1$ (da b reel ist, kommen $\pm i$ nicht in Frage). Wenn $b = 1$, dann $a = 1$ und $z = 1 + i$. Wenn $b = -1$, dann $a = -1$ und $z = -1 - i$. Wir prüfen nach

$$(\pm (1 + i))^2 = 1 + 2i - 1 = 2i.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Multiple Choice.

1. Betrachte das Gebiet definiert durch den roten Teil des Bildes (ohne die blaue Linien)



Ist das Gebiet

(a) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z) > 0,\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$?

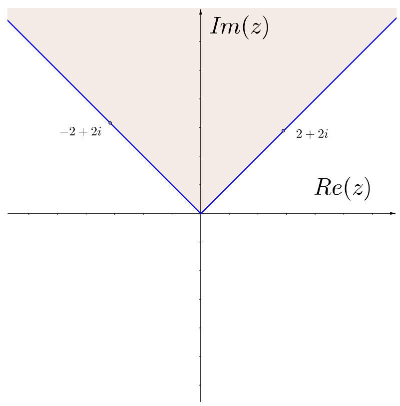
(b) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z) < 0,\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$?

(c) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z) < 0,\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$?

$\surd$ (d) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z) > 0,\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$?

Bitte wenden!

2. Betrachte das Gebiet definiert durch den roten Teil des Bildes (ohne die blaue Linien)



Ist das gebiet

√ (a) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z) > |\,\mathrm{Re}(z)|\}$?

(b) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z) > \mathrm{Re}(z)\}$?

Nein, diese Gebiet enthält den Punkt $z = -7$.

(c) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Re}(z)\}$?

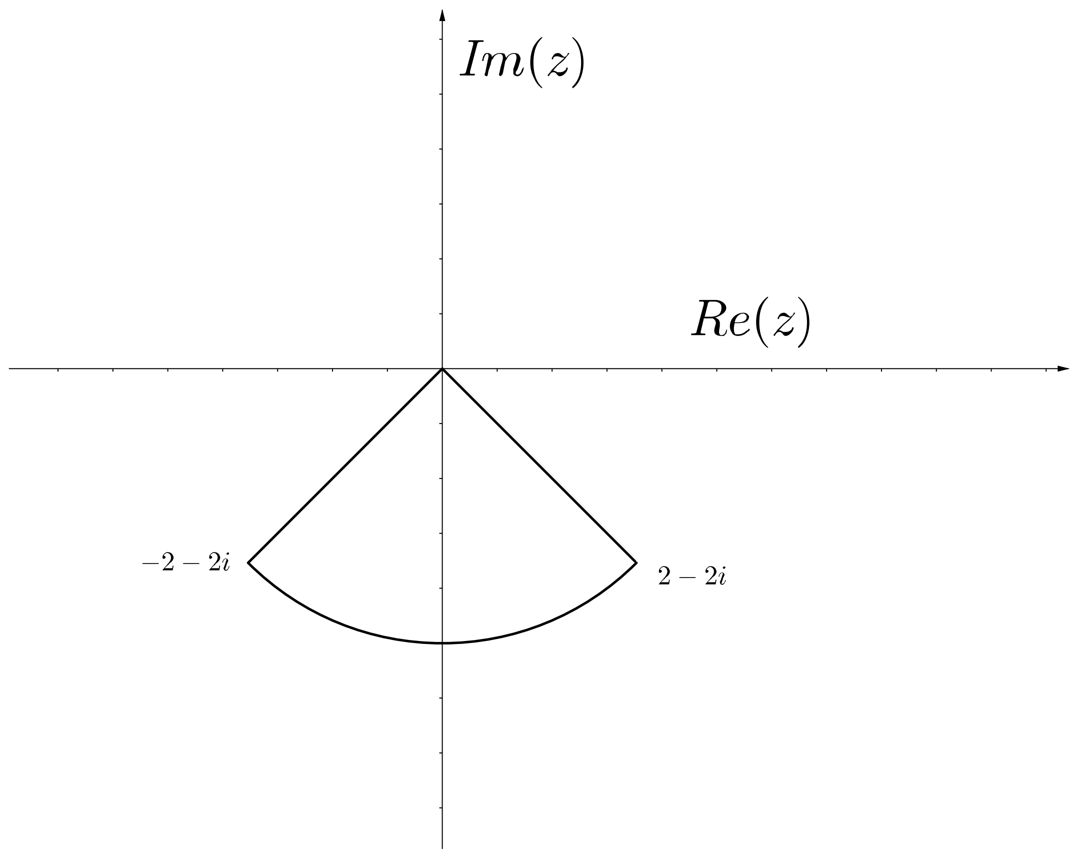
Nein, der Punkt $z = i$ ist in diesem Gebiet nicht enthalten.

(d) $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z) \geq |\,\mathrm{Re}(z)|\}$?

Nein, dieses Gebiet ist zu gross. Es enthält die blaue Linie.

Siehe nächstes Blatt!

3. Betrachte den Kreissektor mit Zentrum 0, und Eckpunkte $-2-2i$ und $2-2i$.



Ist das Gebiet

(a) $\{z \in \mathbb{C} \, : \, -\operatorname{Im}(z) \geq |\operatorname{Re}(z)|\}$?

Nein, dieses Gebiet enthält den Punkt $z = -120i$.

(b) $\{z \in \mathbb{C} \, : \, -\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)|, \ |z| \leq 2\}$

Nein, dieses Gebiet enthält den Punkt $z = i$.

√ (c) $\{z \in \mathbb{C} \, : \, -\operatorname{Im}(z) \geq |\operatorname{Re}(z)|, \ |z| \leq 2\}$?

(d) $\{z \in \mathbb{C} \, : \, \operatorname{Im}(z) < -\operatorname{Re}(z), \ |z| \geq 2\}$?

Nein, der Eckpunkt $z = 0$ ist nicht im diesem Gebiet enthalten.