Lösung 10

1. Berechne die Ableitungen $f'(x)$ der folgenden Funktionen aus der Definition

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

a) x,
Lösung:

$$\begin{aligned} x' &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

b) x^4,
Lösung:

$$\begin{aligned} \left(x^4\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x-h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^4 + 4h^3x + 6h^2x^2 + 4hx^3 + x^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^4 + 4h^3x + 6h^2x^2 + 4hx^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 4x^3 + h^3 + 4h^2x + 6hx^2 \\ &= 4x^3 \end{aligned}$$

c) $x^2 + 2x$,
Lösung:

$$\begin{aligned} \left(x^2+2x\right)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 2\,(x+h) - (x^2+2x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + \frac{2\,(x+h) - 2x}{h} \right) \end{aligned}$$

Bitte wenden!

nun ist

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^2-x^2}{h}+\frac{2\,(x+h)-2x}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{2\,(x+h)-2x}{h}$$
$$=2x+2\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}$$
$$=2x+1$$

d) $\frac{1}{x}$.
Lösung:

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\,(x+h)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x^2}$$

2. Die Ableitung einer Potenzreihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ im Inneren ihres Konvergenzkreises ist

$$f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Rechne damit nach:

a) $\ln(1+x)' = \dfrac{1}{1+x}$,
Lösung:
Aus der Vorlesung wissen wir

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

Siehe nächstes Blatt!

für $|x| < 1$. Also

$$
\begin{aligned}
(\ln(1+x))' &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^{n} \\
&= \frac{1}{1-(-x)} \\
&= \frac{1}{1+x}
\end{aligned}
$$

b) $(\cos(x))' = -\sin(x)$.
Lösung:
Aus Serie 8 wissen wir

$$
\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.
$$

Also

$$
\begin{aligned}
\cos(x)' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

3. Multiple Choice

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ist bijektiv.

$\surd$ (a) Richtig

Die Aussage ist richtig. Die Inverse ist $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

(b) Falsch

2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{143243125325120}$, ist surjektiv.

(a) Richtig

$\surd$ (b) Falsch

Die Aussage ist falsch. 143243125325120 ist gerade, also enthält das Bild von f nur positive Zahlen.

3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ist injektiv.

$\surd$ (a) Richtig

(b) Falsch

4. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ist bijektiv.

(a) Richtig

$\surd$ (b) Falsch

Die Aussage ist falsch, weil $f(x)$ immer ungleich 0 ist. Also ist $f(x)$ nicht surjektiv.

5. Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$, ist injektiv.

$\surd$ (a) Richtig

Die Aussage ist richtig. Die Funktionen $\frac{1}{x}$ und x^3 sind injektive. $f(x) = f(y)$ impliziert $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{y^3}$. Also $x^3 = y^3$ und wir erhalten $x = y$.

(b) Falsch

6. Die Summe zweier injektiver Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine injektive Funktion.

(a) Richtig

$\surd$ (b) Falsch

Die Aussage ist falsch. Betrachte die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = -x$. Dann $f(x) + g(x) = x - x = 0$, i.e. eine nicht injektive Funktion.

7. Das Produkt zweier injektiver Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine injektive Funktion.

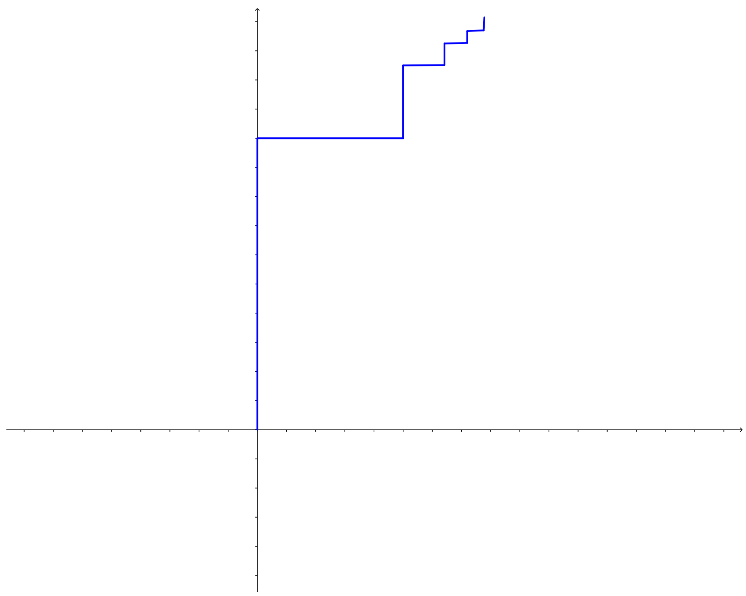
(a) Richtig

$\surd$ (b) Falsch

Die Aussage ist falsch. Betrachte die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = x^3$. Dann $f(x) \cdot g(x) = x^4$. Die Funktion x^4 ist nicht injektiv: zum Beispiel $(-1)^4 = (1)^4$.

Bitte wenden!

8. Ist das der Graph einer Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$?



(a) Richtig

$\surd$ (b) Falsch