Lösung 11

1. Berechne die Ableitung der Funktion a^x, für $a > 0$.
Lösung:

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$$

Also

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = (\ln a)\, e^{x \ln a}.$$

2. Berechne die Ableitung der folgenden Funktionen.
Wir verwenden wiederholt die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel für die Ableitung (Vorlesung) und die folgenden bekannten Ableitungen

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = 1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}\ .$$

a) $x^7 + 3x^2 + 2$
Lösung:

$$\begin{aligned}(x^7 + 3x^2 + 2)' &= (x^7)' + (3x^2)' + (2)' \\ &= 7x^6 + 3 \cdot 2x + 0 \\ &= 7x^6 + 6x + 0\end{aligned}$$

b) $\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$
Lösung:
Mit der Quotientenregel findet man

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}\right)' &= \frac{(x^2 + x + 1)'(x - 1) - (x^2 + x + 1)(x - 1)'}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{(2x + 1)(x - 1) - (x^2 + x + 1)1}{(x - 1)^2} = 1 - \frac{3}{(x - 1)^2}\ .\end{aligned}$$

Bitte wenden!

c) $\sin(x)\cos(x)$
Lösung:
Mit der Produktregel findet man

$$\begin{aligned}(\sin(x)\cos(x))' &= (\sin(x))'\cos(x) + \sin(x)(\cos(x))' \\ &= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) \\ &= \cos(x)^2 - (1-\cos(x)^2) \\ &= 2\cos(x)^2 - 1\end{aligned}$$

oder $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, also $(\sin(x)\cos(x))' = \cos(2x)$.

d) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
Lösung:
Mit der Kettenregel findet man

$$\begin{aligned}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' &= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) \\ &= \frac{-\cos(\frac{1}{x})}{x^2}\end{aligned}$$

e) $\tan(e^x)$
Lösung:
Mit der Kettenregel findet man

$$\begin{aligned}(\tan(e^x))' &= \left(1 + (\tan(e^x))^2\right)(e^x)' \\ &= \left(1 + (\tan(e^x))^2\right)(e^x)\end{aligned}$$

f) $\dfrac{x}{\sqrt{x^4+1}}$
Lösung:
Wir berechnen mit der Quotienten- und Kettenregel

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\right)' &= \frac{x'\sqrt{x^4+1} - x\left(\sqrt{x^4+1}\right)'}{x^4+1} \\ &= \frac{\sqrt{x^4+1} - x(4x^3)\frac{1}{2}(x^4+1)^{-\frac{1}{2}}}{x^4+1} \\ &= \frac{1-x^4}{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}\,.\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Bestimme die globalen Maxima und Minima der Funktion.

a) $f : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

Lösung:

Die Funktion f ist ein Polynom und deshalb überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$. Die Ableitung $f'(x)$ verschwindet also in $x = 0, \frac{4}{3}$. Die entsprechenden Funktionswerte $f(0) = 1$, $f(\frac{4}{3}) = \frac{-5}{27}$ zusammen mit den Randwerten $f(-2) = -15$ und $f(2) = 1$ enthalten die globalen Maxima und Minima von f (Vorlesung). Das globale Maximum von f ist demnach $f(2) = f(0) = 1$ und das globale Minimum ist $f(-2) = -15$.

b) $f : [-1, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

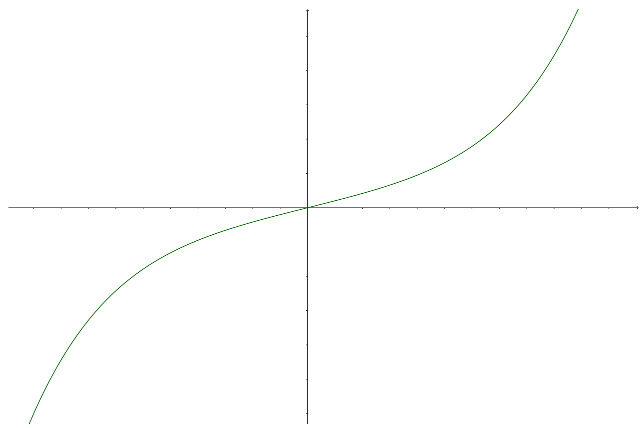
Lösung:

Die Funktion f ist ein Polynom und deshalb überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x^2 - 4x + 3) = 12x(x-1)(x-3)$. Die Ableitung $f'(x)$ verschwindet also in $x = 0, 1, 3$. Die entsprechenden Funktionswerte $f(0) = 0$, $f(1) = 5$ und $f(3) = -27$ zusammen mit den Randwerten $f(-1) = 37$ und $f(4) = 32$ enthalten die globalen Maxima und Minima von f (Vorlesung). Das globale Maximum von f ist demnach $f(-1) = 37$ und das globale Minimum ist $f(3) = -27$.

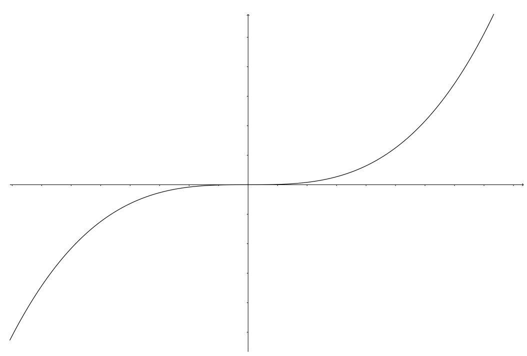
4. Multiple choice

Bitte wenden!

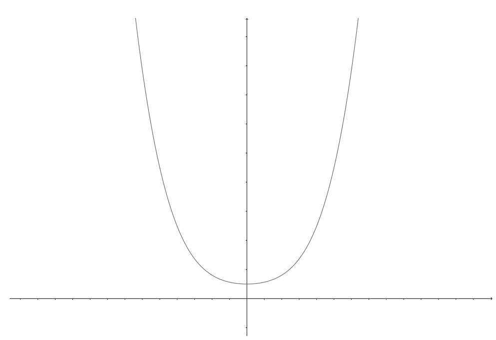
1. Sei f eine stetige Funktionen mit Graph



Was ist der Graph von $f'(x)$?

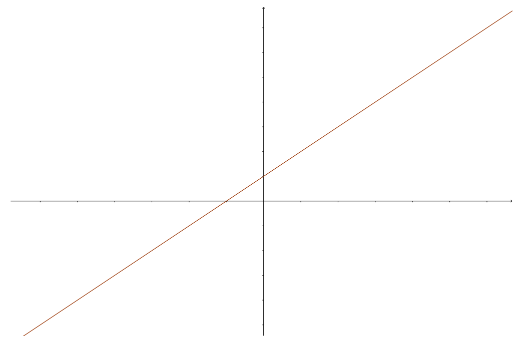


(a)



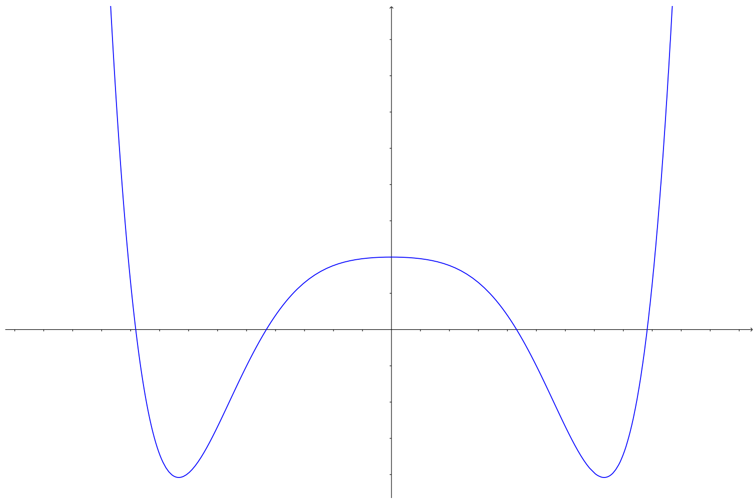
$\surd$ (b)

Siehe nächstes Blatt!

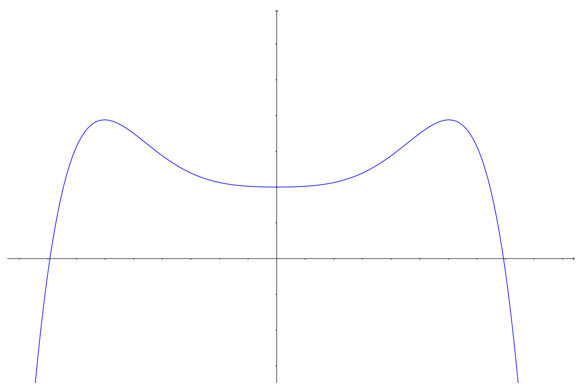
(c) 

Bitte wenden!

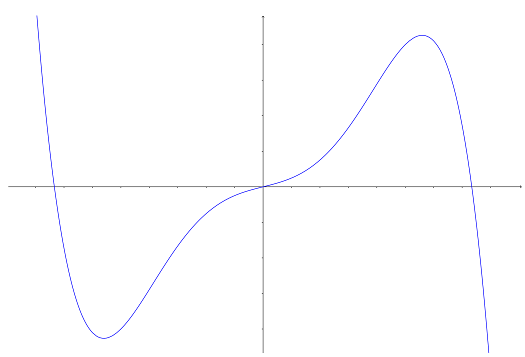
2. Sei f eine stetige Funktionen mit Graph



Was ist der Graph von $f'(x)$?

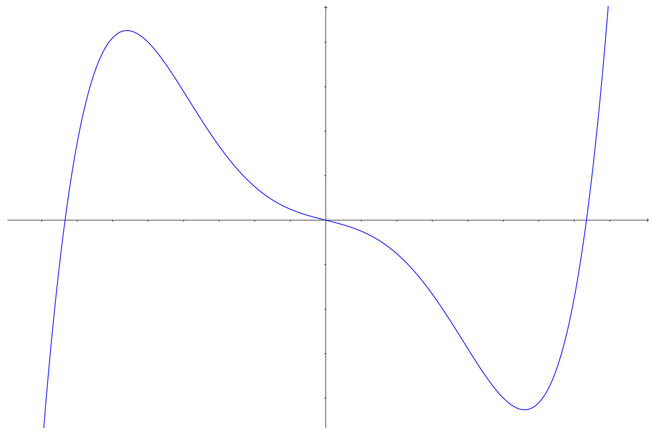


(a)



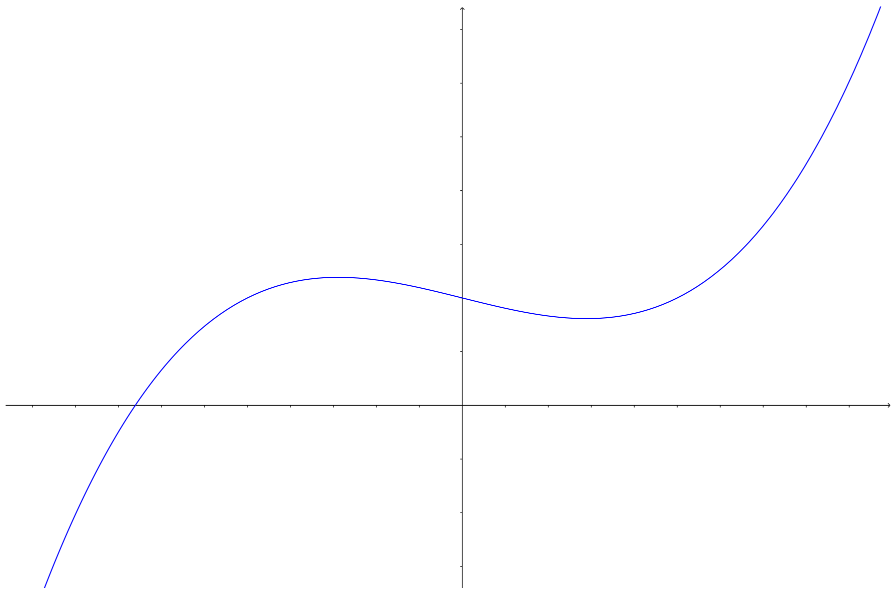
(b)

Siehe nächstes Blatt!

$\surd$ (c) 

Bitte wenden!

3. Betrachte den Graphen



Ist dies den Graph von:

√ (a) $f(x) := x^3 - x + 1$?

(b) $f(x) := x^3 + x + 1$?

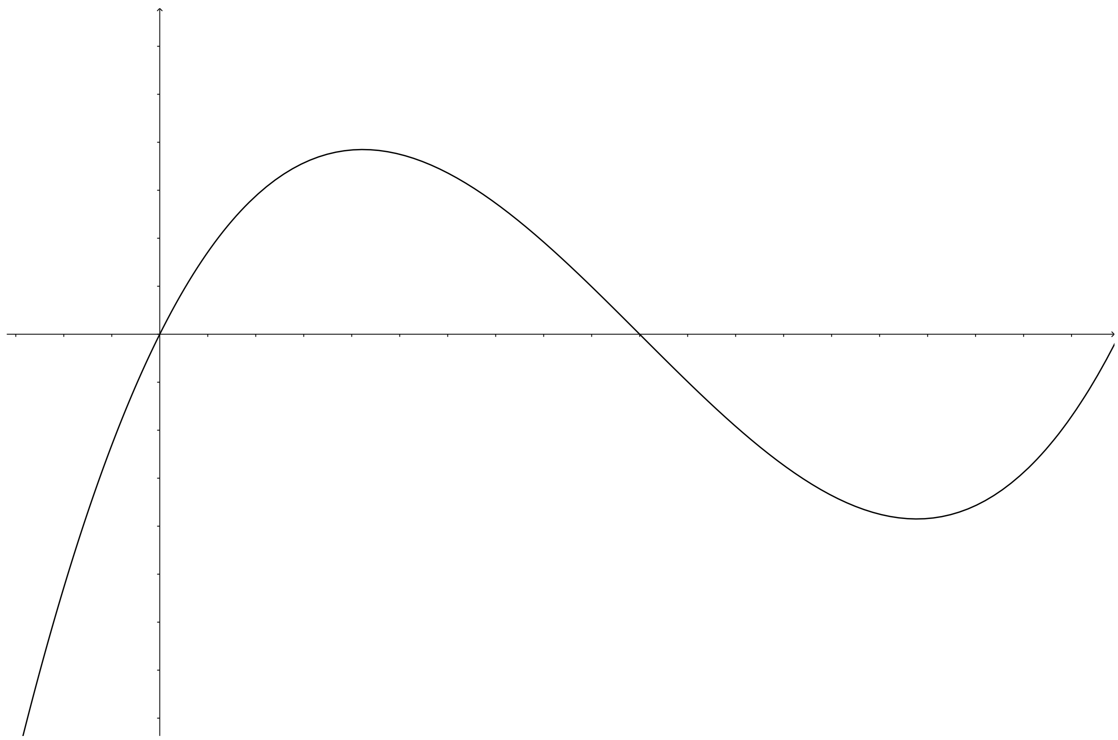
Nein, die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2 + 1$. Also ist $f'(x)$ immer positiv und $f(x)$ hat kein Maximum oder Minimum.

(c) $f(x) := x^2 + 2x + 1$?

Nein, $f(x)$ hat nur ein Minimum.

Siehe nächstes Blatt!

4. Betrachte den Graphen



Ist dies der Graph von:

(a) $f(x) := x^3 - x + 2$?

Nein, $f(0) \neq 0$.

√ (b) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 2x$?

(c) $f(x) := 3x^4 + 2x^2 - 6x$?

Nein, die Ableitung ist $f'(x) = 12x^3 + 4x - 6$. Die Steigung von $f(x)$ bei $x = 0$ ist $f'(0) = -6$.