D-CHAB Grundlagen der Mathematik I (Analysis A) HS 2015
Theo Bühler

Lösung 12

1. Betrachte Die Funktionen

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) Verifiziere $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
Lösung:

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

b) Verifiziere

$$\sinh'(x) = \cosh(x), \quad \cosh'(x) = \sinh(x).$$

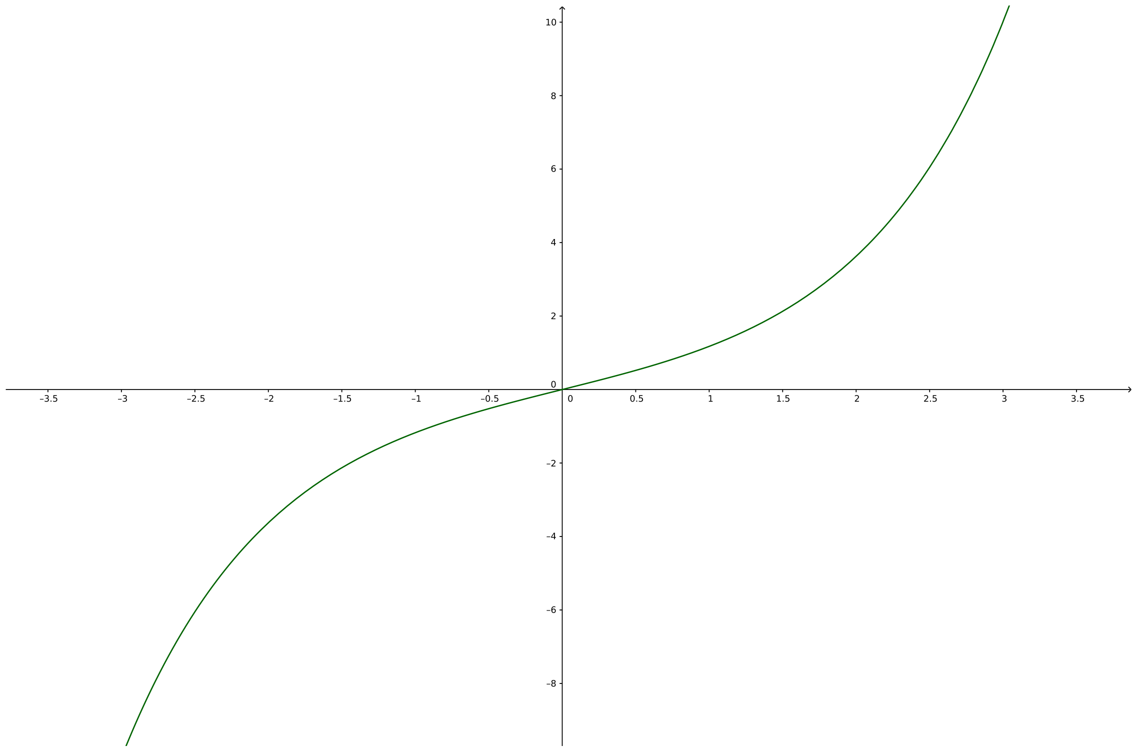
Lösung:

$$\begin{aligned}\sinh'(x) &= \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \cosh(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh'(x) &= \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \sinh(x)\end{aligned}$$

c) Skizziere den Graph von $\sinh(x)$ und bestimme Definitions- und Wertebereich der Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh}(x)$.
Lösung:
Den Graph ist

Bitte wenden!



Der Definitionsbereich von $\operatorname{arsinh}(x)$ ist $\mathbb{R}$, der Wertebereich von $\operatorname{arsinh}(x)$ ist $\mathbb{R}$.

d) Bestimme die Ableitung von $\operatorname{arsinh}(x)$.
Lösung:
Wir haben $\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = x$. Durch ableiten finden wir

$$1 = (\sinh(\operatorname{arsinh}(x)))' = \cosh(\operatorname{arsinh}(x))(\operatorname{arsinh}'(x)),$$

also $\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))}$. Da $\cosh(x)$ grösser als 0 für jede x ist, es folgt aus a)

$$\cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}.$$

Wir schliessen

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}'(x) &= \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Die Funktion $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ erfülle die Gleichungen

$$f''(x) = f(x), \quad f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1.$$

Bestimme alle a_n.

Lösung:

Die zweite Ableitung der Potenzreihe ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' \\
&= \big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots\big)'' \\
&= (a_0)'' + (a_1 x)'' + \big(a_2 x^2\big)'' + \big(a_3 x^3\big)'' + \big(a_4 x^4\big)'' + \big(a_5 x^5\big)'' + \dots \\
&= 0 + 0 + 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 5 \cdot 4a_5 x^3 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.
\end{aligned}$$

Wir wissen dass $f''(x) = f(x)$. Aus Koeffizientenvergleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

folgt $a_n = (n+2)(n+1)a_{n+2}$, für jede $n \geq 0$. Das impliziert

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}.$$

Die Funktion $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ erfüllt $f(0) = 0$, also

$$0 = f(0) = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 + a_3 0^3 + a_4 0^4 + a_5 0^5 + \dots = a_0$$

und $a_0 = 0$. Wir haben

$$\begin{aligned}
&(n=2) \qquad a_2 = \tfrac{a_0}{2 \cdot 1} = 0, \\
&(n=4) \qquad a_4 = \tfrac{a_2}{4 \cdot 3} = 0, \\
&(n=6) \qquad a_6 = \tfrac{a_4}{6 \cdot 5} = 0, \\
&\qquad \dots,
\end{aligned}$$

also, $a_n = 0$ für n gerade.

Die Funktion $f'(x)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots\big)' \\
&= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Es gilt $f'(0) = 1$, also

$$1 = f'(0) = a_1 + +2a_2 0 + 3a_3 0^2 + 4a_4 0^3 + 5a_5 0^4 + \cdots = a_1$$

und $a_1 = 1$.

$$\begin{aligned} (n = 3) \qquad & a_3 = \tfrac{a_1}{3\cdot 2} = \tfrac{1}{3\cdot 2}, \\ (n = 5) \qquad & a_5 = \tfrac{a_3}{5\cdot 4} = \tfrac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}, \\ (n = 7) \qquad & a_7 = \tfrac{a_5}{7\cdot 6} = \tfrac{1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}, \\ & \ldots, \end{aligned}$$

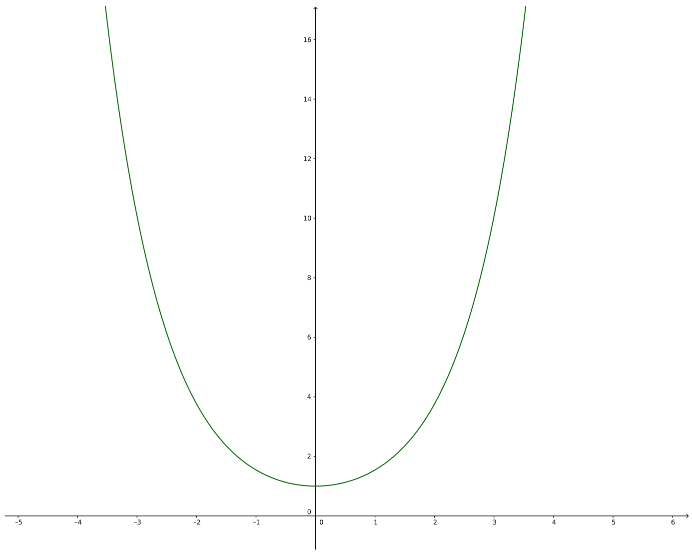
also $a_n = \frac{1}{n!}$ für n ungerade und somit ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Es ist $f(x) = \sinh(x)$, wie wir später sehen werden.

3. Multiple choice

1. Der Graph von $\cosh(x)$ ist



Welche Aussage ist korrekt?

(a) Es existiert eine Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh}(x) : [0, \infty) \to [0, \infty)$

√ (b) Es existiert eine Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh}(x) : [1, \infty) \to [0, \infty)$

Ja, $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ ist bijektiv.

(c) Es existiert eine Umkehrfunktion $\operatorname{arcosh}(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$

Bitte wenden!

2. Die Ableitung von cosh ist...

(a) $-\sinh(x)$?

(b) $-\cosh(x)$?

$\surd$ (c) $\sinh(x)$?

Ja,

$$\begin{aligned}\cosh'(x) &= \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \sinh(x)\end{aligned}$$

3. Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Gleichung

$$f''(x) = f(x)?$$

$\surd$ (a) $\sinh(x)$,

Ja, $(\sinh(x))'' = (\cosh(x))' = \sinh(x)$,

$\surd$ (b) $\cosh(x)$

Ja, $(\cosh(x))'' = (\sinh(x))' = \cosh(x)$,

$\surd$ (c) $a\sinh(x) + \cosh(x), \quad a \neq 0.$

Ja, $(a\sinh(x) + \cosh(x))'' = (a\sinh(x))'' + (\cosh(x))'' = a\sinh(x) + \cosh(x)$.

4. Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Gleichungen

$$f''(x) = f(x), \quad f(0) = 1?$$

(a) $\sinh(x)$,

Nein, $\sinh(0) = 0$.

$\surd$ (b) $\cosh(x)$,

Ja, $\cosh(1) = 1$.

$\surd$ (c) $a\sinh(x) + \cosh(x), \quad a \neq 0$.

Ja, $a\sinh(0) + \cosh(0) = a \cdot 0 + \cosh(0) = 1$.

5. Welche der folgenden Funktionen erfüllen die Gleichungen

$$f''(x) = f(x), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0?$$

(a) $\sinh(x)$,

Nein, $\sinh(0) = 0$.

$\surd$ (b) $\cosh(x)$,

Ja, $(\cosh(1))' = \sinh(0) = 0$.

(c) $a\sinh(x) + \cosh(x), \quad a \neq 0$.

Nein, $(a\sinh(x) + \cosh(x))' = (a\cosh(x)) + (\sinh(x))$, und $a\cosh(0) + \sinh(0) = a$.