Lösung 2

1. Bestimme die kartesische Form und die Polarform von

a) $-1 + i\sqrt{3}$,

Lösung. Für die Polarform: $r = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$, andererseits

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

$-1+i\sqrt{3}$ ist im zweiten Quadrant, also ist dieser Winkel nicht korrekt! Der richtige Winkel ist

$$-\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi.$$

Also

$$-1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

b) $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$,

Lösung. Wir betrachten zuerst $z = 1 + i\sqrt{3}$. Für die Polarform: $r = 2$ und

$$\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Dieser Winkel ist korrekt, da $z = 1 + i\sqrt{3}$ im ersten Quadrant ist. Also

$$\left(-1 - \sqrt{3}i\right) = (-1)\left(1 + \sqrt{3}i\right) = e^{i\pi}2e^{\frac{\pi i}{3}} = 2e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

Für $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ haben Wir $r = 2$ und

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Dieser Winkel ist korrekt weil $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ im vierten Quadrant ist. Es folgt

$$\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) = 2e^{i\frac{4}{3}\pi}2e^{-i\frac{1}{4}\pi} = 4e^{i\frac{13}{12}\pi}.$$

Andererseits die kartesische Form von $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$

$$\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{6} + i\sqrt{2} - \sqrt{6} = -\sqrt{2} - \sqrt{6} + i\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)$$

Bitte wenden!

c) $\dfrac{1-i}{2+3i}$ (Bestimme das Argument auf zwei Nachkommastellen genau),

Lösung. Die Kartesische Form ist

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{2+3i} &= \frac{1-i}{2+3i}\frac{2-3i}{2-3i}\\ &= \frac{(1-i)(2-3i)}{4+9}\\ &= \frac{(2-2i-3i-3)}{13}\\ &= \frac{(-1-5i)}{13}\end{aligned}$$

Für die Polarform: $r = \sqrt{\left(-\frac{1}{13}\right)^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{13}$ und

$$\arctan\left(\frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{1}{13}}\right) = \arctan(5).$$

$\frac{(-1-5i)}{13}$ ist im dritten Quadrant, also ist dieser Winkel nicht korrekt. Der richtige Winkel ist $\arctan(5)+\pi$. Es folgt

$$\frac{1-i}{2+3i} = \frac{(-1-5i)}{13} = \frac{\sqrt{2}e^{i(\arctan(5)+\pi)}}{13}$$

d) $\dfrac{3i}{e^{\frac{\pi i}{6}} - 3e^{-\frac{5\pi i}{6}}}$.

Lösung. Zuerst ein kleiner Trick:

$$e^{\frac{\pi i}{6}} - 3e^{\frac{-5\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi i}{6}} + \left(e^{\pi i}\right)3e^{-\frac{5\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi i}{6}} + 3e^{\left(-\frac{5\pi i}{6}+\pi i\right)} = e^{\frac{\pi i}{6}} + 3e^{\frac{\pi i}{6}} = 4e^{\frac{\pi i}{6}}$$

Also haben wir für die Polarform

$$\frac{3i}{e^{\frac{\pi i}{6}} - 3e^{-\frac{5i\pi}{6}}} = \frac{3e^{\frac{\pi i}{2}}}{4e^{\frac{\pi i}{6}}} = \frac{3}{4}e^{\frac{\pi i}{2}-\frac{\pi i}{6}} = \frac{3}{4}e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

Die kartesische Form ist

$$\frac{3}{4}e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{8}\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Berechne die kartesische Form von

a) $\left(5+5i\sqrt{3}\right)^{23}$,

Lösung. Zuerst betrachten wir $z = 5+5i\sqrt{3}$. Für die Polarform

$$r = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{100} = 10$$

und

$$\arctan\left(\frac{5\sqrt{3}}{5}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

und dieser Winkel ist richtig. Also

$$\left(5+5i\sqrt{3}\right)^{23} = \left(10e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^{23} = 10^{23}e^{\frac{23\pi i}{3}}.$$

Es folgt

$$10^{23}e^{\frac{23\pi i}{3}} = 10^{23}e^{\frac{24\pi i - \pi i}{3}} = 10^{23}\left(e^{\frac{24\pi i}{3}}e^{-\frac{\pi i}{3}}\right) = 10^{23}\left(e^{6\pi i}e^{-\frac{\pi i}{3}}\right) = 10^{23}e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

Also

$$\left(5+5i\sqrt{3}\right)^{23} = 10^{23}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 10^{23}\left(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3})\right) = \frac{10^{23} - i10^{23}\sqrt{3}}{2}$$

b) $\left(-1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{4}$

Lösung. Zuerst betrachten wir $z = -1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$. Für die Polarform

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

und

$$\arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{-1}\right) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Der richtige Winkel ist $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$. Also

$$\begin{aligned}
\left(-1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 e^{\frac{20\pi i}{6}} \\
&= \frac{16}{9}\left(e^{\frac{18\pi i}{6}+\frac{2\pi i}{6}}\right) \\
&= \frac{16}{9}\left(e^{3\pi i+\frac{\pi i}{3}}\right) \\
&= \frac{16}{9}\left(e^{3\pi i}e^{\frac{\pi i}{3}}\right) \\
&= -\frac{16}{9}\left(e^{\frac{\pi i}{3}}\right) \\
&= -\frac{16}{9}\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right) \\
&= -\frac{8}{9} - i\frac{8}{9}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

3. Verifiziere:

a) $\sin(\varphi + \vartheta) = \sin(\varphi)\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)\cos(\varphi)$, und

Lösung. Betrachte die zwei komplexen Zahlen $e^{i\vartheta}$, $e^{i\varphi}$, also

$$\mathrm{Im}(e^{i\vartheta}e^{i\varphi}) = \mathrm{Im}(e^{i(\vartheta+\varphi)}) = \sin(\varphi + \vartheta)$$

Andererseits

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(e^{i\vartheta}e^{i\varphi}) &= \mathrm{Im}(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) \\
&= \mathrm{Im}(\cos(\varphi)\cos(\vartheta) + i\sin(\varphi)\cos(\vartheta) + \cos(\varphi)i\sin(\vartheta) - \sin(\varphi)\sin(\vartheta)) \\
&= \sin(\varphi)\cos(\vartheta) + \cos(\varphi)\sin(\vartheta)
\end{aligned}$$

Also

$$\sin(\varphi + \vartheta) = \sin(\varphi)\cos(\vartheta) + \cos(\varphi)\sin(\vartheta).$$

b) $\tan(\varphi + \vartheta) = \dfrac{\tan(\varphi) + \tan(\vartheta)}{1 - \tan(\varphi)\tan(\vartheta)}$ für $-\frac{\pi}{2} < \vartheta, \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Lösung. Es gilt $\cos(\varphi) \neq 0$, $\cos(\vartheta) \neq 0$ Aus der Vorlesung und aus a) haben wir

$$\tan(\varphi + \vartheta) = \frac{\sin(\varphi + \vartheta)}{\cos(\varphi + \vartheta)} = \frac{\sin(\varphi)\cos(\vartheta) + \cos(\varphi)\sin(\vartheta)}{\cos(\varphi)\cos(\vartheta) - \sin(\varphi)\sin(\vartheta)}.$$

Siehe nächstes Blatt!

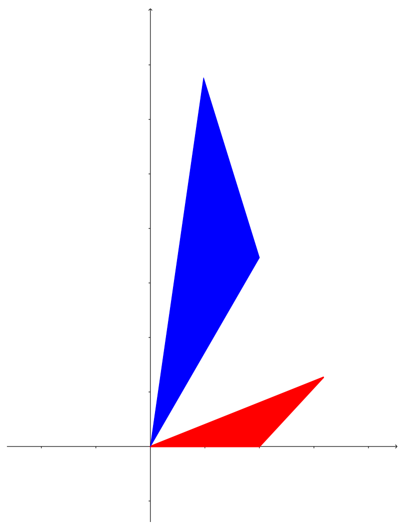
Dann

$$\begin{aligned}
\tan(\varphi+\vartheta) &= \frac{\sin(\varphi+\vartheta)}{\cos(\varphi+\vartheta)} \\
&= \frac{\sin(\varphi)\cos(\vartheta)+\cos(\varphi)\sin(\vartheta)}{\cos(\varphi)\cos(\vartheta)-\sin(\varphi)\sin(\vartheta)} \\
&= \frac{\cos(\varphi)\tan(\varphi)\cos(\vartheta)+\cos(\varphi)\tan(\vartheta)\cos(\vartheta)}{\cos(\varphi)\cos(\vartheta)-\sin(\varphi)\sin(\vartheta)} \\
&= \cos(\varphi)\cos(\vartheta)\left(\frac{\tan(\varphi)+\tan(\vartheta)}{\cos(\varphi)\cos(\vartheta)-\sin(\varphi)\sin(\vartheta)}\right) \\
&= \left(\frac{\tan(\varphi)+\tan(\vartheta)}{\frac{\cos(\varphi)\cos(\vartheta)}{\cos(\varphi)\cos(\vartheta)}-\frac{\sin(\varphi)\sin(\vartheta)}{\cos(\varphi)\cos(\vartheta)}}\right) \\
&= \frac{\tan(\varphi)+\tan(\vartheta)}{1-\tan(\varphi)\tan(\vartheta)}
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. Multiple Choice.

1. Welche der folgenden Transformationen bildet das rote Gebiet auf das blaue Gebiet ab?



(a) $z \to 2iz$,

Nein, diese Transformation ist eine Drehung mit Winkel $\frac{\pi}{2}$ zusammen mit einer Streckung mit Faktor 2.

(b) $z \to \overline{iz}$,

Nein, diese Transformation ist sicher keine Streckung, da $|\overline{iz}| = |iz| = |i||z| = |z|$.

√ (c) $z \to (1 + i\sqrt{3})z$,

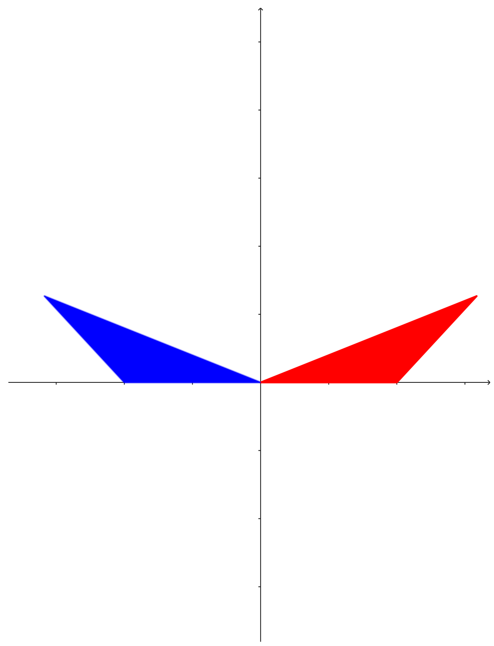
Ja, diese Transformation ist eine Drehung mit Winkel $\frac{\pi}{3}$ zusammen mit einer Streckung mit Faktor 2 ($\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{\pi i}{3}}$).

(d) $z \to \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{4} z$,

Nein, diese Transformation ist eine Drehung mit Winkel $\frac{\pi}{3}$ zusammen mit einer Streckung mit Faktor 1/2 ($\frac{1+i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi i}{3}}$).

Siehe nächstes Blatt!

2. Welche der folgenden Transformationen bildet das rote Gebiet auf das blaue Gebiet ab?



(a) $z \to \overline{z}$

Nein, das ist eine Spiegelung an der rellen Achse.

√ (b) $z \to i\overline{(-iz)}$

Ja, das ist eine Spiegelung an der imaginären Achse.

(c) $z \to -z$

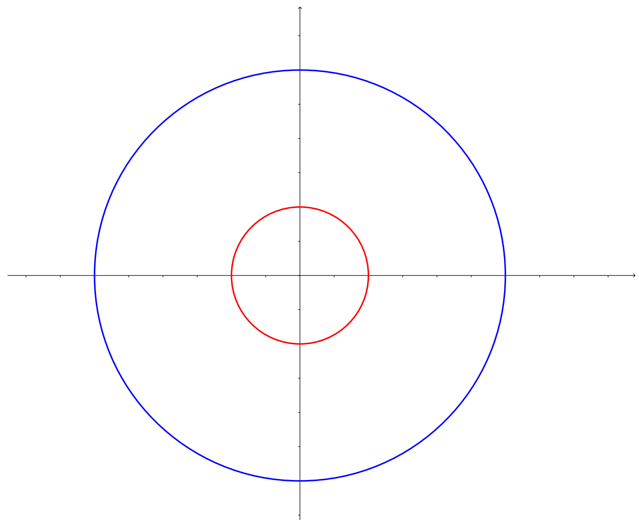
Nein, das ist eine Drehung mit Winkel π.

(d) $z \to -iz$

Nein, das ist eine Drehung mit Winkel $\frac{3\pi}{2}$ oder auch eine Punktspiegelung am Ursprung.

Bitte wenden!

3. Welche der folgenden Transformationen bildet dem roten Kreis auf dem blauen Kreis ab?



√ (a) $z \to 3i\overline{(-iz)}$,

Ja, das ist eine Spiegelung an der imaginären Axe, zusammen mit einer Streckung mit Faktor 3.

√ (b) $z \to 3\overline{\left(i\overline{(-iz)}\right)}$,

Ja, die Trasformation ist $z \to \overline{i\overline{(-iz)}}$ zusammen mit einer Streckung mit Faktor 3, und $z \to \overline{i\overline{(-iz)}}$ erhaltet den rote Kreis, da $|\overline{i\overline{(-iz)}}| = |z|$.

(c) $z \to -iz$,

Nein, das ist eine Drehung mit Winkel $\frac{3\pi}{2}$.

√ (d) $z \to 3e^{icz}$ für ein c Relle,

Ja, das ist eine Drehung mit Winkel $\frac{c}{\pi}$, zusammen mit einer Streckung mit Faktor 3.