Lösung 3

1. Führe die folgenden Polynomdivisionen mit Rest durch.

a) $(x^3 - x^2 - 5x + 5) : (x - 3)$

Lösung.

$$
\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & -x^2 & -5x & +5) & : (x-3) | x^2 + 2x + 1 \\
-(x^3 & -3x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^2 & -5x & +5 & \\
 & -(2x^2 & -6x) & & \\
\hline
 & & x & +5 & \\
 & & -(x & -3) & \\
\hline
 & & & 8 &
\end{array}
$$

Also gilt

$$(x^3 - x^2 - 5x + 5) : (x - 3) = x^2 + 2x + 1 \ \text{ Rest } 8 \ ,$$

oder

$$x^3 - x^2 - 5x + 5 = \big(x^2 + 2x + 1\big)\,(x - 3) + 8 \ .$$

b) $(2x^5 + 2x^4 + x^3 + 5) : (2x^2 - 1)$

Lösung.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
(2x^5 & +2x^4 & +x^3 & +0x^2 & +0x & +5) & : (2x^2-1) | x^3 + x^2 + x + \frac{1}{2} \\
-(2x^5 & & -x^3) & & & & \\
\hline
 & 2x^4 & +2x^3 & & & +5 & \\
 & -(2x^4 & & -x^2) & & & \\
\hline
 & & 2x^3 & +x^2 & & +5 & \\
 & & -(2x^3 & & -x) & & \\
\hline
 & & & x^2 & +x & +5 & \\
 & & & -(x^2 & & -\frac{1}{2}) & \\
\hline
 & & & & & x + \frac{11}{2} &
\end{array}
$$

Bitte wenden!

Also gilt

$$(2x^5 + 2x^4 + x^3 + 5) : (2x^2 - 1) = x^3 + x^2 + x + \frac{1}{2} \text{ Rest } \left(x + \frac{11}{2}\right) ,$$

oder

$$2x^5 + 2x^4 + x^3 + 5 = \left(x^3 + x^2 + x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 1) + \left(x + \frac{11}{2}\right) .$$

2. Bestimme alle Nullstellen, deren Vielfachheit sowie die vollständige Faktorisierung folgender Polynome.

a) $x^3 - 4x^2 + 9x - 10$

Lösung. Durch Ausprobieren finden wir die Nullstelle 2. Wir dividieren $x^3 - 4x^2 + 9x - 10$ durch $x - 2$ und erhalten

$$x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = (x - 2)(x^2 - 2x + 5).$$

$x^2 - 2x + 5 = 0$ ist eine quadratische Gleichung. Die Lösungen lauten

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}.$$

Also $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$. Die vollständige Faktorisierung ist

$$x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = (x - 2)(x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))$$

und die Vielfachheit aller Nullstellen ist 1.

b) $x^6 - 4x^5 + 5x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 24x - 12$ (Hinweis: $x = 1 + i$ ist eine doppelte Nullstelle).

Lösung. Gemäss Hinweis ist $1 + i$ eine doppelte Nullstelle. Aus Aufgabe 3b) wissen wir, dass $1 - i$ auch eine doppelte Nullstelle ist. Also ist $x^6 - 4x^5 + 5x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 24x - 12$ durch

$$\begin{aligned}(x - (1 + i))^2 (x - (1 - i))^2 &= \left(x^2 - 2x + 2\right)^2 \\ &= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4\end{aligned}$$

teilbar.

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
(x^6 & -4x^5 & +5x^4 & +4x^3 & -20x^2 & +24x & -12) & : (x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4) | x^2 - 3 \\
-(x^6 & -4x^5 & +8x^4 & -8x^3 & +4x^2) & & & \\
\hline
 & & -3x^4 & +12x^3 & -24x^2 & +24x & -12 & \\
 & & -(-3x^4 & +12x^3 & -24x^2 & +24x & -12) & \\
\hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Siehe nächstes Blatt!

Also gilt

$$x^6 - 4x^5 + 5x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 24x - 12 = (x^2 - 2x + 2)^2(x^2 - 3).$$

$x^2 - 3 = 0$ ist eine quadratische Gleichung mit Lösungen $x = \pm\sqrt{3}$. Die Gleichung $x^2 - 2x + 2 = 0$ ist auch quadratisch und die Lösungen sind $x = 1 \pm i$. Also ist vollständige Faktorisierung

$$\begin{aligned} x^6 - 4x^5 + 5x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 24x - 12 &= (x^2 - 2x + 2)^2(x^2 - 3) \\ &= \left((x - (1+i))\,(x - (1-i))\right)^2 \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) \\ &= (x - (1+i))^2\,(x - (1-i))^2 \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind $1 \pm i$ (beide doppelt) und $\pm\sqrt{3}$ (beide einfach).

3. Sei $p(x)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Verifiziere:

a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\overline{p(z)} = p(\overline{z})$.

Lösung. Sei z eine komplexe Zahl. Dann ist $z = re^{i\vartheta}$ für eine $r \geq 0$ und ein $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Für $n \in \mathbb{N}$ haben wir

$$\begin{aligned} \overline{(z^n)} &= \overline{\left((re^{i\vartheta})^n\right)} \\ &= \overline{(r^n e^{i\vartheta n})} \\ &= r^n e^{-i\vartheta n} \\ &= \left(re^{-i\vartheta}\right)^n \\ &= (\overline{z})^n \end{aligned}$$

Sei

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dann ist wegen $\overline{a_k} = a_k$ für alle k.

$$\begin{aligned} \overline{p(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_0} \\ &= a_n \overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \cdots + a_0 \\ &= a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_0 \\ &= p(\overline{z}) \end{aligned}$$

Bitte wenden!

b) Sei z eine Nullstelle von $p(x)$, dann ist $\overline{z}$ auch eine Nullstelle von p.

Lösung. Es folgt aus a). Sei z eine Nullstelle von $p(x)$, dann

$$p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Multiple choice.

1. Betrachte ein quadratisches Polynom $p(x) = x^2 + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\surd$ (a) Für $\lambda > 0$ hat $p(x)$ keine reelle Nullstelle.

Ja, die Lösungen lauten $\pm\sqrt{-\lambda}$ und sind daher imaginär.

(b) Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $p(x)$ eine reelle Nullstelle und eine nicht reelle Nullstelle hat.

Nein, aus Aufgabe 3b) wissen wir, dass beide Nullstellen nicht reell sind.

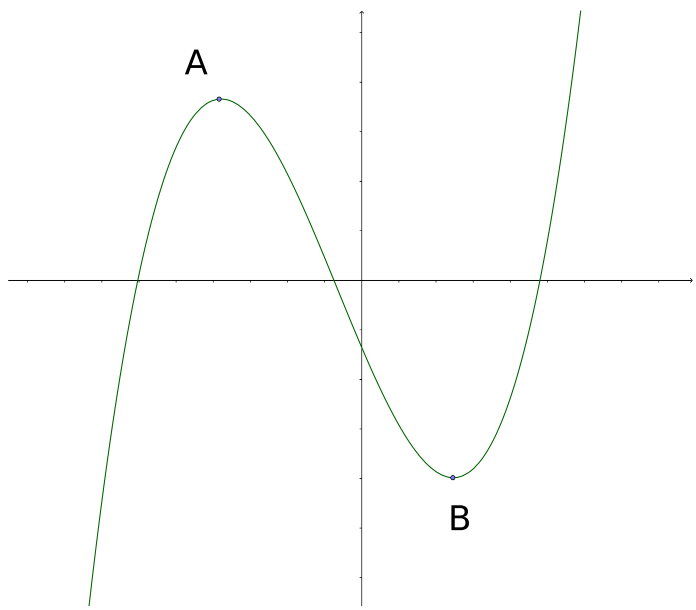
(c) Es gibt ein nicht-reelles λ, so dass $p(x)$ eine reelle Nullstelle und eine nicht reelle Nullstelle hat.

Nein, man kann die Gleichung $x^2 = -\lambda$ lösen, und die Nullstellen sind beide nicht reell.

(d) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ hat $p(x)$ keine doppelten Nullstellen.

Nein, betrachte $\lambda = 0$.

2. Sei $q(x) = (x+2)^3 - 5(x+2)^2 + x + \frac{3}{2}$. Der Graph ist



Betrachte $p(x) := q(x) + \lambda$, für ein reelles λ. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

√ (a) $q(x)$ hat drei Nullstellen mit Vielfachheit 1.

Ja, $q(x)$ schneidet die x-Achse in 3 Punkten.

√ (b) Es gibt ein $\lambda < 0$, so dass $p(x) := q(x) + \lambda$ nur eine reelle Nullstelle hat.

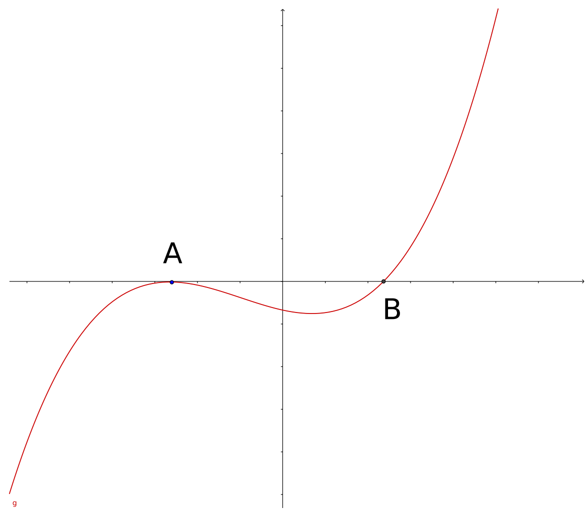
Ja, sei d der Abstand zwischen A und der x-Achse, dann schneidet $p(x) := q(x) + \lambda$ für $\lambda < -d$ die x-Achse nur in einem Punkt.

√ (c) Es gibt ein $\lambda > 0$ so dass $p(x) := q(x) + \lambda$ nür eine reelle Nullstelle hat.

Ja, sei d der Abstand zwischen B und der x-Achse, dann schneidet $p(x) := q(x) + \lambda$ für $\lambda > d$ die x-Achse nur in einem Punkt.

Siehe nächstes Blatt!

3. Sei $p(x) := x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Der Graph ist



Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $p(x)$ hat eine reelle Nullstelle mit Vielfachheit 3.

Nein, $p(x)$ trifft die x-Achse in 2 Punkten.

(b) $p(x)$ hat zwei reelle Nullstellen mit Vielfachheit 1 und eine nicht-reelle Nullstelle z mit Vielfachheit 1.

Nein, $p(x)$ ist ein reelles Polynom, also $\overline{z}$ ist auch eine Nullstelle mit Vielfachheit 1. Der Grad von $p(x)$ ist 3 und das ist ein Widerspruch mit dem Fundamentalsatz der Algebra!

(c) $p(x)$ hat zwei nicht-reelle Nullstellen mit Vielfachheit 1.

Nein, $p(x)$ schneidet die x-Achse in 2 Punkten.

$\surd$ (d) $p(x)$ hat eine doppelte reelle Nullstelle x_1 und eine einfache reelle Nullstelle x_2.