Lösung 4

1. Berechne

a) 10!
Lösung:
Wir berechnen nacheinander 4!=24, 5!=5(4!)=120, 6!=6(5!)=720, 7!=7(6!)=5040, 8!=8(7!)=40320, 9!=9(8!)=362880 und 10!=10(9!)=3628800.

b) 12!
Lösung: Wir berechnen mit **a** 12!=(12·11)(10!)=132 (10!)=479001600.

c) $\binom{7}{3}$
Lösung:
Wir berechnen $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 7 \cdot 5 = 35.$

d) $\binom{28}{26}$
Lösung:
Wir berechnen

$$\binom{28}{26} = \binom{28}{28-26} = \binom{28}{2} = \frac{28 \cdot 27}{2} = 14 \cdot 27 = 378\ .$$

e) $\binom{45}{6}$
Lösung:
Wir berechnen

$$\binom{45}{6} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 20 = 8145060\ .$$

In der ersten Gleichung haben wir gekürzt.

f) $\binom{49}{6}$
Lösung:
Wir berechnen

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 2} = 49 \cdot 8 \cdot 47 \cdot 23 \cdot 3 \cdot 11 = 13983816\ .$$

In der ersten Gleichung haben wir gekürzt.

g) $\binom{20}{10}$
Lösung:
Wir berechnen

$$\begin{aligned}\binom{20}{10} &= \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\\ &= \frac{2\cdot 19\cdot 2\cdot 17\cdot 2\cdot 15\cdot 2\cdot 13\cdot 2\cdot 11}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\\ &= 2^2\cdot 19\cdot 17\cdot 13\cdot 11 = 184756\ .\end{aligned}$$

In der ersten und zweiten Gleichung haben wir gekürzt.

2. *(Chu-Vandermonde-Identität)*

a) Zeige mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}\ .$$

Hinweis: $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$
Lösung:
Der binomische Lehrsatz besagt

$$(1+x)^N = \sum_{l=0}^{N}\binom{N}{l}x^l\ .$$

Einsetzen in die im Hinweis gegebene Identität $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ ergibt

$$\sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k}x^k = \left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^j\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\ . \tag{1}$$

Wir berechnen die rechte Seite mit Hilfe der Cauchy-Produktformel (Vorlesung)

$$\sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}x^j\binom{n}{k-j}x^{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}\right)x^k\ .$$

(1) ist eine Gleichheit von Polynomen. Diese gilt genau dann, wenn die Koeffizienten gleich sind. Die Gleichheit der Koeffizienten ist die gesuchte Identität

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}\ .$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Folgere aus **a**: $\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$

Lösung:

Wir setzen $m = k = n$ und erhalten in der Formel aus **a**

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 .$$

c) Berechne $\binom{10}{5}$ mit Hilfe von **b** und durch Aufstellen des Pascalschen Dreiecks.

Lösung:

Wir berechnen zuerst mit Hilfe von **b**

$$\binom{10}{5} = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j}^2 = 1^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 + 5^2 + 1^2 = 2 \cdot 126 = 252 .$$

Alternativ betrachten wir das Pascalsche Dreieck. Seine $n$te Zeile ist durch die Einträge $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$, gegeben. Wir berechnen diese Einträge nacheinander für $n = 6, 7, 8, 9, 10$ mit Hilfe von $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ und $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, soweit wir sie für den Wert $\binom{10}{5}$ benötigen. Das Resultat ist

$$\begin{aligned}
n = 6 &: *, 6, 15, 20, 15, 6, * \\
n = 7 &: *, *, 21, 35, 35, 21, *, * \\
n = 8 &: *, *, *, 56, 70, 56, *, *, * \\
n = 9 &: *, *, *, *, 126, 126, *, *, *, * \\
n = 10 &: *, *, *, *, *, 252, *, *, *, *, * .
\end{aligned}$$

Die mit $*$ bezeichneten Einträge werden für die Berechnung nicht benötigt.

d) Gib ein kombinatorisches Argument für die Identität in **a**.

Lösung:

Wir betrachten eine Urne mit $m + n$ Kugeln, nummeriert von 1 bis $m + n$. m Kugeln seien rot, die restlichen n seien blau. Die Anzahl Möglichkeiten k Kugeln aus den $m + n$ Kugeln auszuwählen ist der Binomialkoeffizient $\binom{m+n}{k}$ (Vorlesung). Die Anzahl Möglichkeiten k Kugeln aus den $m+n$ Kugeln auszuwählen, so dass genau j davon rot sind, ist $\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$. (Beachte, dass im Fall $j > m$ oder $k-j > n$ diese Anzahl null ist.) Wenn wir diese Anzahl über $j = 0, 1, \ldots, k$ summieren, erhalten wir $\binom{m+n}{k}$. Dies ist ein kombinatorischer Beweis der Identität in **a**.

Bitte wenden!

3. *(Trinomische Formel)*

a) Zeige, dass der binomische Lehrsatz als

$$(a+b)^n = \sum_{\substack{0\le j,k\le n\\ j+k=n}} \frac{n!}{j!k!} a^j b^k$$

geschrieben werden kann.
Lösung:
Der binomische Lehrsatz besagt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \; .$$

Wenn wir einen zweiten Summationsindex $j = n-k$ einführen, erfüllt dieser $j+k=n$ und wir können die Summe als Doppelsumme über die beiden Indizes j und k schreiben

$$\sum_{\substack{0\le j,k\le n\\ j+k=n}} \binom{n}{k} a^j b^k \; .$$

Verwenden wir noch $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{j!k!}$, erhalten wir die gesuchte Form.

b) Verifiziere, dass

$$(a+b+c)^n = \sum_{\substack{0\le j,k,l\le n\\ j+k+l=n}} \frac{n!}{j!k!l!} a^j b^k c^l$$

gilt.
Lösung:
Wir setzen zweimal den binomischen Lehrsatz in der Form **a** ein

$$\begin{aligned}
((a+b)+c)^n &= \sum_{\substack{0\le i,l\le n\\ i+l=n}} \frac{n!}{i!l!} (a+b)^i c^l \\
&= \sum_{\substack{0\le i,l\le n\\ i+l=n}} \frac{n!}{i!l!} \sum_{\substack{0\le j,k\le i\\ j+k=i}} \frac{i!}{j!k!} a^j b^k c^l \\
&= \sum_{\substack{0\le j,k,l\;\le n\\ j+k+l=n}} \frac{n!}{j!k!l!} a^j b^k c^l \; .
\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Multipliziere $(a+b+c)^5$ aus.
Lösung:
Wir verwenden die Formel aus **b** für $n=5$ und erhalten

$$\begin{aligned}(a+b+c)^5 =& a^5+b^5+c^5\\ &+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4\\ &+5a^4c+10a^3c^2+10a^2c^3+5ac^4\\ &+5b^4c+10b^3c^2+10b^2c^3+5bc^4\\ &+20a^3bc+20b^3ac+20c^3ab\\ &+30a^2b^2c+30a^2c^2b+30b^2c^2a\ .\end{aligned}$$