Lösung 5

1. Verifiziere

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{k}\binom{n}{k} = 2^n$,

Lösung. Die Aussage folgt mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{k}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$,

Lösung. Die Aussage folgt mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}.$$

c) Interpretiere a) and b).

Lösung. $\binom{n}{k}$ ist gleich der Anzahl der Teilmengen von

$$\{1, 2, \ldots, n\}$$

der Grösse k. Die Aufgabe 1.a) impliziert, dass die Anzahl aller Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ gleich zu 2^n ist. Andererseits, Aufgabe 1.b) impliziert, dass die Anzahl aller Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit **gerader** Ordnung gleich der Anzahl aller Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit **ungerader** Ordnung ist.

2. Betrachte die rationalen Funktionen

i) $\dfrac{x}{x^2-1}$,

ii) $\dfrac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^5-3x^4+2x^3}$,

Bitte wenden!

iii) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4}$,

iv) $\dfrac{x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{2x^3 - 8x^2 + 2x + 12}$.

a) Finde den Definitionsbereich,

Lösung.

i) Sei $\frac{p(x)}{q(x)} := \frac{x}{x^2-1}$. Die Nullstellen von $q(x) = x^2 - 1$ sind $x = \pm 1$. Es gilt $p(1) = 1$ und $p(-1) = -1$, also ist der Definitionsbereich von $\frac{x}{x^2-1}$ gleich $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

ii) Sei $\frac{p(x)}{q(x)} := \frac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^5-3x^4+2x^3}$. Es gilt

$$q(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 = x^3(x-1)(x-2).$$

Der Definitionsbereich von $\frac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^5-3x^4+2x^3}$ gleich $\mathbb{R} \setminus \{0; 1; 2\}$ ist. Andererseits haben wir $p(1) = 0$, $p(0) = 4$, $p(2) = 0$. Also ist der Definitionsbereich der gekürzte Form von $\frac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^5-3x^4+2x^3}$ gleich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

iii) Sei $\frac{p(x)}{q(x)} := \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4}$. Die Nullstellen $q(x) = x^2 - 4$ sind $x = \pm 2$. Der Definitionsbereich von $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4}$ gleich $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ ist. Es gilt $p(2) = 0$, $p(-2) = -12$. Also ist der Definitionsbereich der gekürzte Form von $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4}$ gleich $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

iv) Sei $\frac{p(x)}{q(x)} := \frac{x^5-4x^4+2x^3+4x^2-2x+1}{2x^3-8x^2+2x+12}$. Polynomdivison zeigt

$$\left(2x^3 - 8x^2 + 2x + 12\right) : (x+1) = 2x^2 - 10x - 12.$$

Wir schließen $q(x) = 2(x-3)(x-2)(x+1)$. Der Definitionsbereich von $\frac{x^5-4x^4+2x^3+4x^2-2x+1}{2x^3-8x^2+2x+12}$ gleich $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2; 3\}$ ist. Es gilt $p(-1) = 0$, $p(3) = 4$ und $p(2) = -3$. Also ist der Definitionsbereich der gekürzte Form von $\frac{x^5-4x^4+2x^3+4x^2-2x+1}{2x^3-8x^2+2x+12}$ gleich $\mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$.

b) kürze,

Lösung.

i) Sei $\frac{p(x)}{q(x)} := \frac{x}{x^2-1}$. Hier ist kürzen nicht möglich.

ii) Sei $\frac{p(x)}{q(x)} := \frac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^5-3x^4+2x^3}$. Aus a) wissen wir, dass $p(x)$ durch $(x-1)(x-2)$ teilbar ist. Polynomdivision zeigt

$$\left(2x^3 - 4x^2 - 2x + 4\right) : (x-1)(x-2) = 2x + 2$$

und es folgt $p(x) = 2(x-1)(x-2)(x+1)$. Wir schließen

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^5 - 3x^4 + 2x^3} = \frac{2(x-1)(x-2)(x+1)}{x^3(x-1)(x-2)}$$

Siehe nächstes Blatt!

und kürzen:

$$\frac{2(x+1)}{x^3}.$$

iii) Sei $\frac{p(x)}{q(x)} := \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4}$. Aus a) wissen wir, dass $p(x)$ durch $(x-2)$ teilbar ist. Mit der Polynomdivision haben wir

$$\left(x^3-2x^2-x+2\right):(x-2) = x^2-1.$$

Wir schließen

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4} = \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

und kürzen $\frac{x^2-1}{x+2}$.

iv) Sei $\frac{p(x)}{q(x)} := \frac{x^5-4x^4+2x^3+4x^2-2x+1}{2x^3-8x^2+2x+12}$. Aus a) wissen wir, dass $p(x)$ durch $(x+1)$ teilbar ist. Polynomdivison zeigt

$$\left(x^5-4x^4+2x^3+4x^2-2x+1\right):(x+1) = x^4-5x^3+7x^2-3x+1.$$

Wir schließen

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{x^5-4x^4+2x^3+4x^2-2x+1}{2x^3-8x^2+2x+12}\\ &= \frac{(x^4-5x^3+7x^2-3x+1)(x+1)}{2(x-3)(x-2)(x+1)}\end{aligned}$$

und kürzen:

$$\frac{x^4-5x^3+7x^2-3x+1}{2x^2-10x+12}.$$

c) finde die Partialbruchzerlegung der gekürzten Brüche

Lösung.

i) $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

ii) $\frac{2(x+1)}{x^3} = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

iii) Wir haben

$$\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-4} = \frac{x^2-1}{x+2}.$$

Mit der Polynomdivision erhalten wir

$$(x^2-1):(x+2) = x-2 \;\text{ Rest } 3\,,$$

Bitte wenden!

Also

$$x^2 - 1 = (x+2)(x-2) + 3$$

Wir schließen

$$\frac{x^2-1}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)+3}{x+2} = x - 2 + \frac{3}{x+2}.$$

iv) Wir haben

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 10x + 12}.$$

Mit der Polynomdivision erhalten wir

$$(x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1) : (2x^2 - 10x + 12) = \frac{x^2+1}{2} \text{ Rest } 2x - 5 \ ,$$

Also

$$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1 = (2x^2 - 10x + 12)\left(\frac{x^2+1}{2}\right) + 2x - 5$$

Wir schließen

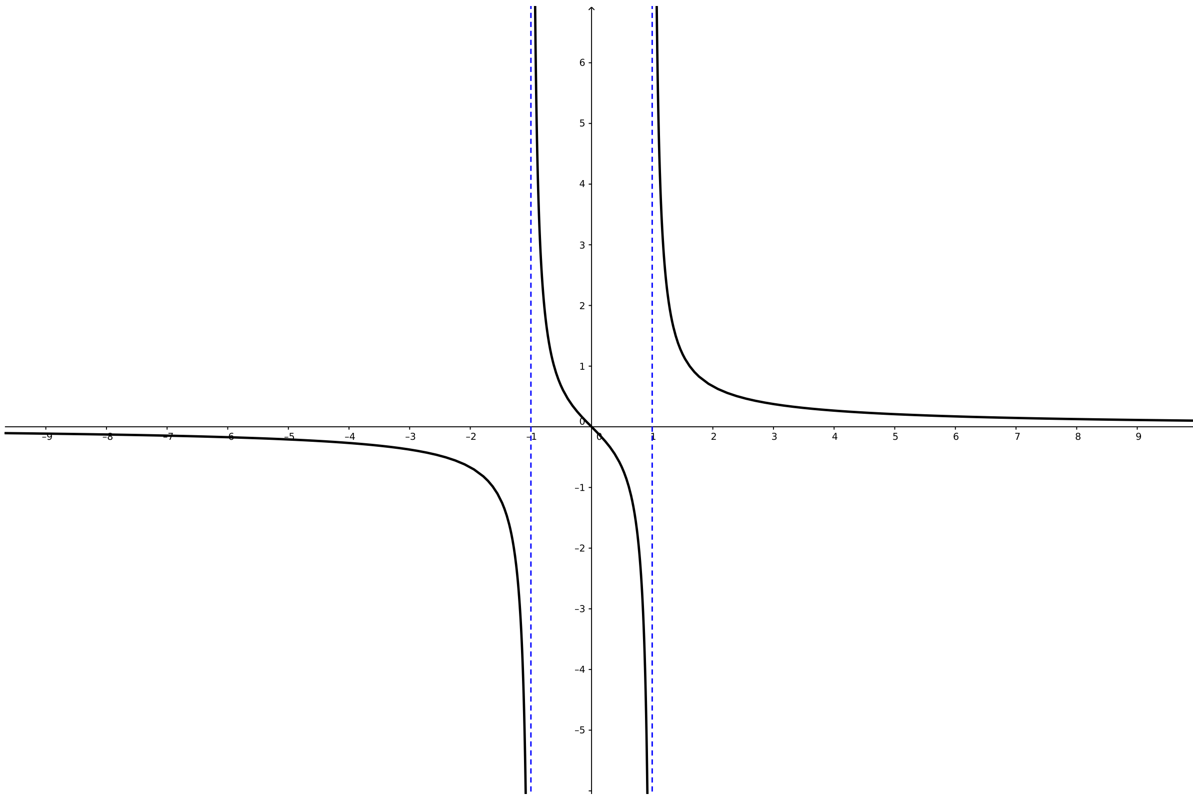
$$\begin{aligned}\frac{x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{2x^3 - 8x^2 + 2x + 12} &= \frac{(2x^2 - 10x + 12)\left(\frac{x^2+1}{2}\right) + 2x - 5}{2x^2 - 10x + 12} \\ &\frac{x^2+1}{2} + \frac{2x-5}{2x^2 - 10x + 12} \\ &= \frac{x^2+1}{2} + \frac{1}{2(x-3)} + \frac{1}{2(x-2)}.\end{aligned}$$

d) skizziere den Graph der obigen rationalen Funktionen.

Lösung.

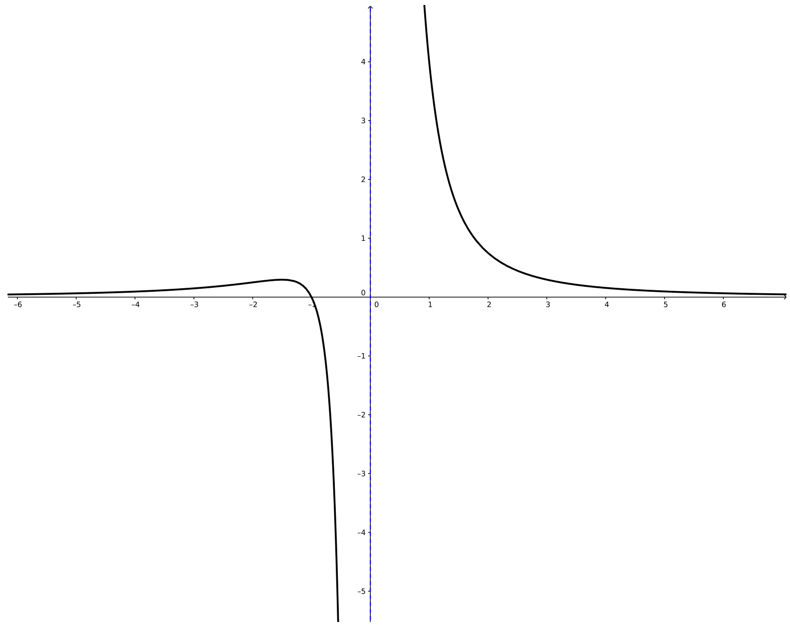
i) $\dfrac{x}{x^2-1}$,

Siehe nächstes Blatt!



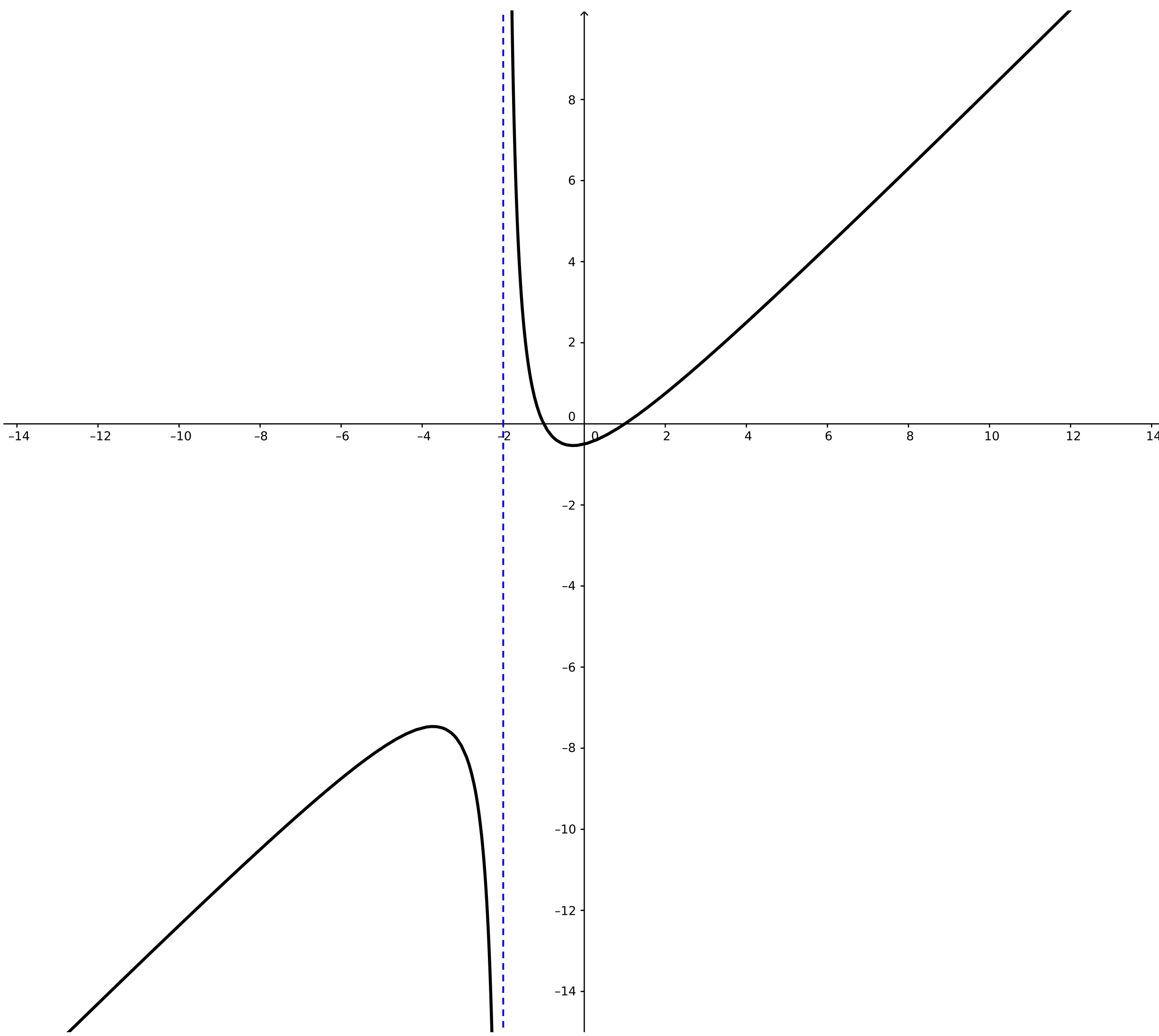
Bitte wenden!

ii) $\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$,



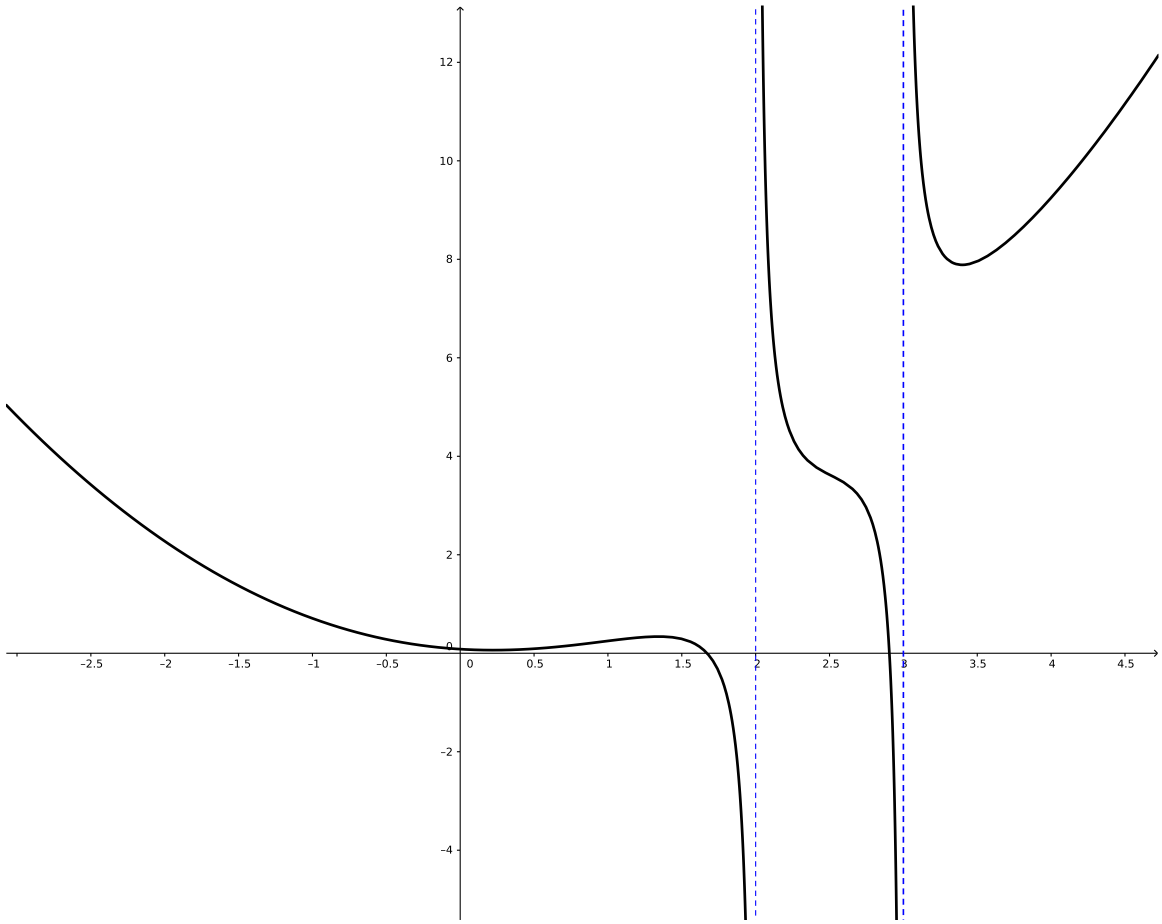
Siehe nächstes Blatt!

iii) $x - 2 + \dfrac{3}{x+2}$,



Bitte wenden!

iv) $\dfrac{x^2+1}{2} + \dfrac{1}{2(x-3)} + \dfrac{1}{2(x-2)}$.



Siehe nächstes Blatt!

3. Multiple choice

1. Welche der folgenden Funktionen hat eine gekürzte Form, die ein reelles Polynom ist?

(a) $\dfrac{x}{x^2+1}$

Nein, hier ist kürzen nicht möglich.

$\surd$ (b) $\dfrac{x^3+4x^2+7x+6}{x+2}$

Ja, die gekürzte Form ist x^2+2x+3.

(c) $\dfrac{x^{78}+632x^{34}+47832695x^{42}+71x^{12}+6x^5+3x^2+123}{x^{98}+345x^{47}+45632695x^{36}+71x^7-34x^4-893x^2+129}$

Nein, der Grad der Nenner ist grosser als der Grad des Zählers.

(d) $\dfrac{x^{459}+632x^{34}+47832695x^{42}+71x^{12}+6x^5+3x^2+123}{x^{98}+345x^{47}+45632695x^{36}+71x^7-34x^4-893x^2+129x}$

Nein, der Nenner hat die Nullstelle in $x=0$, aber der Zähler nicht.

2. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Sei $\frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion. Angenommen, ihre gekürzte Form ist nicht ein reelles Polynom, so hat $q(x)$ eine reelle Nullstelle x_0, so dass $p(x_0) \neq 0$ ist.

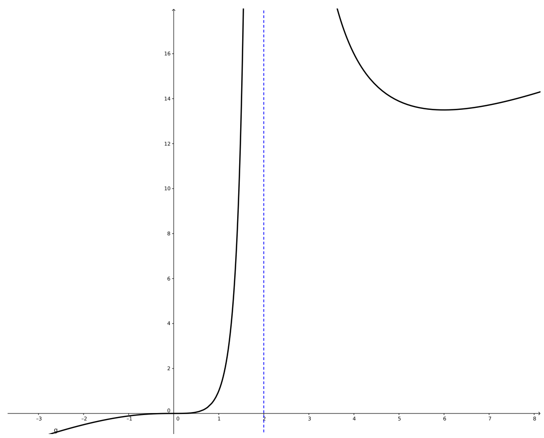
Nein, betrachte $\frac{1}{1+x^2}$.

$\surd$ (b) Sei $\frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sei $q(x)$ mit Grad d, dann ist $n \leq d$.

Ja, $x_1, \ldots, x_n$ sind alles Nullstellen von $q(x)$. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra wissen wir, dass $q(x)$ genau d Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) hat. Also $n \leq d$.

Bitte wenden!

3. Betrachte den Graphen



Ist dies der Graph von:

(a) $$\frac{x^2 - 6x + 9}{x - 4x + 4}?$$

Nein, $\frac{x^2-6x+9}{x-4x+4} = \frac{(x-3)^2}{(x-2)^2}$. Zähler und Nenner sind überall nichtnegativ, d.h. das Bild von $\frac{x^2-6x+9}{x-4x+4}$ ist nirgends negativ.

✓ (b) $$\frac{x^3}{x - 4x + 4}?$$

Ja.

(c) $$\frac{x^3 - x + 9}{x^2 + x + 3}?$$

Nein, der Nenner hat keine reellen Nullstellen.

(d) $$\frac{x^{459} + 632x^{34} + 47832695x^{42} + 71x^{12} + 6x^5 + 3x^2 + 123}{x^{98} + 345x^{47} + 45632695x^{36} + 71x^7 - 34x^4 - 893x^2 + 129x}?$$

Nein, der Nenner hat die Nullstelle $x = 0$, aber der Zähler nicht.