Lösung 6

1. Berechne den Grenzwert, wenn er existiert.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n+9}{n^4+6n^2-n}$
Lösung:
Wir berechnen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+9}{n^4+6n^2-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-2}-n^{-3}+9n^{-4}}{1+6n^{-2}-n^{-3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(n^{-2}-n^{-3}+9n^{-4})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+6n^{-2}-n^{-3})}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n^{-2} - \lim\limits_{n\to\infty} n^{-3} + \lim\limits_{n\to\infty} 9n^{-4}}{1+6\lim\limits_{n\to\infty} n^{-2} - \lim\limits_{n\to\infty} n^{-3}}$$
$$= \frac{0-0+0}{1+6\cdot 0-0} = 0\,.$$

Hier haben wir erstens den Bruch mit n^{-4} erweitert. Zweitens haben wir die Rechenregel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ angewendet. Drittens haben wir die Rechenregel $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ angewendet. Schliesslich haben wir $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-k} = 0$ für $k>0$ (Vorlesung) verwendet.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n^7+7n^4-21n^2-10}{6n^7-2042n^5}$
Lösung:
Wir gehen wie in Teilaufgabe **a** vor und berechnen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3n^7+7n^4-21n^2-10}{6n^7-2042n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3+7n^{-3}-21n^{-5}-10n^{-7}}{6-2042n^{-2}}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(-3+7n^{-3}-21n^{-5}-10n^{-7})}{\lim\limits_{n\to\infty}(6-2042n^{-2})} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}\,.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^4+n}{23n^3+n+1}$
Lösung:
Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^4+n}{23n^3+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+n^{-2}}{23+n^{-1}+n^{-3}}\,.$$

Bitte wenden!

Es gilt $\lim_{n\to\infty}(23+n^{-1}+n^{-3})=23$, aber $\lim_{n\to\infty}(4n+n^{-2})$ existiert nicht. Also existiert der Grenzwert nicht.

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{(1+i)n^6-3n^5+(6-5i)n^4+3n^2}{(1-i)n^6-(2i-1)n^5+4in^4-in}$

Lösung:

Wir berechnen wie in Teilaufgabe **a**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+i)n^6-3n^5+(16-i)n^4+3n^2}{(1-i)n^6+in^5+4in^4-in}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+i)-3n^{-1}+(16-i)n^{-2}+3n^{-4}}{(1-i)+in^{-1}+4in^{-2}-in^{-5}}$$
$$=\frac{\lim_{n\to\infty}((1+i)-3n^{-1}+(16-i)n^{-2}+3n^{-4})}{\lim_{n\to\infty}((1-i)+in^{-1}+4in^{-2}-in^{-5})}$$
$$=\frac{1+i}{1-i}=\frac{1}{2}(1+i)^2=\frac{1}{2}(2i)=i\ .$$

Bemerkung: Sei $p(n)=a_Mn^M+a_{M-1}n^{M-1}+\dots$ ein Polynom vom Grad M. Sei $q(n)=b_Nn^N+b_{N-1}n^{N-1}+\dots$ ein Polynom vom Grad N und $q(n)\neq 0$. Dann findet man mit der Lösungsmethode dieser Aufgabe

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}=\begin{cases}0 & M<N\\ \frac{a_M}{b_N} & M=N\\ \text{nicht existent} & M>N\end{cases}\ .$$

2. Schreibe die ersten vier Folgenglieder der Folgen (a_n), (b_n), (c_n) explizit hin. Man kann zeigen, dass diese Folgen konvergieren. Bestimme ihre Grenzwerte.

a) $a_0=0$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

Lösung:

Die ersten vier Folgenglieder sind

$$\begin{aligned}a_0&=0\\ a_1&=\sqrt{2}\\ a_2&=\sqrt{2+\sqrt{2}}\\ a_3&=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ .\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $a=\lim_{n\to\infty}a_n$ existiert. Also erfüllt a

$$a=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+a_n}=\sqrt{2+\lim_{n\to\infty}a_n}=\sqrt{2+a}\ .$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir quadrieren diese Gleichung und erhalten die quadratische Gleichung $a^2 = 2+a$ für a. Diese hat die Lösungen $a = -1$ und $a = 2$. Die erste Lösung kommt nicht in Frage, da $a_n \geq 0$ für alle n, also auch $a \geq 0$. Deshalb ist $a = 2$.

b) Sei $x > 0$. $b_0 = 1$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right)$
Lösung:
Die ersten vier Folgenglieder sind

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= \frac{1}{2}(x+1) \\ b_2 &= \frac{x^2+6x+1}{4(x+1)} \\ b_3 &= \frac{x^4+28x^3+70x^2+28x+1}{8(x+1)(x^2+6x+1)} \ . \end{aligned}$$

Wir wissen, dass $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ existiert. Also erfüllt b

$$\begin{aligned} b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{x}{b_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\ \to\infty} \frac{x}{b_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(b + \frac{x}{\lim_{n\to\infty} b_n}\right) = \frac{1}{2}\left(b + \frac{x}{b}\right) \ . \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile haben wir die Rechenregel $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\ \to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ verwendet. In der dritten Zeile haben wir die Rechenregel $\lim_{n\ \to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\ \to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ für die konstante Folge $a_n = x$ verwendet. Daraus erhalten wir die quadratische Gleichung $b^2 = x$. Da $b_n > 0$ für alle n ist $b \geq 0$. Also ist $b = \sqrt{x}$.

c) Sei $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ und $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ die Fibonacci-Folge. $c_n = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$
Lösung:
Man berechnet $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$, $F_7 = 21$ und die ersten vier Folgenglieder

$$c_0 = 1 \quad c_1 = \frac{3}{2} \quad c_2 = \frac{8}{5} \quad c_3 = \frac{21}{13} \ .$$

Bitte wenden!

Wir wissen, dass $c = \lim_{n \to\infty} c_n$ existiert. Also erfüllt c

$$
\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n} + F_{2n-1}}{F_{2n}} = 1 + \lim_{n \to\infty} \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n-1}}{F_{2n-1} + F_{2n-2}} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{F_{2n-1}}{F_{2n-2}}}{\frac{F_{2n-1}}{F_{2n-2}} + 1} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n-1}}{c_{n-1} + 1} \\
&= 1 + \frac{\lim_{n\to\infty} c_{n-1}}{\lim_{n\to\infty} c_{n-1} + 1} = 1 + \frac{c}{c+1} \, .
\end{aligned}
$$

Daraus erhalten wir die quadratische Gleichung $c^2 - c - 1 = 0$ für c. Deren Lösungen sind $c = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Da $F_n > 0$ für alle n ist $c_n > 0$ für alle n. Also ist $c \geq 0$ und nur die zweite Lösung ist möglich: $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (goldener Schnitt).

3. Zeige

a) Die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend.
Lösung: Da $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, können wir $a_n \geq a_{n-1}$ umformulieren zu $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$. Wir rechnen für $n \geq 2$

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n-1}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{(n^2-1)^{n-1}}{(n^2)^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n-1} \\
&\geq \frac{n+1}{n} \left(1 - (n-1) \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n^2 - n + 1}{n^2} \, ,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Bernoulli-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ angewandt haben. Wegen $(n+1)(n^2 - n + 1) = n^3 + 1$ ergibt sich somit

$$
\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{n^3+1}{n^3} > 1,
$$

wie gewünscht.

b) Die Folge $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist monoton fallend.
Lösung: Wir verfahren wie in **a** und zeigen, dass $\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq 1$ ist. Einsetzen und

Siehe nächstes Blatt!

Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^n \cdot n^n}{(n-1)^n(n+1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\
&\geq \left(1+n\cdot\frac{1}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+n-1}{n^2-1} \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1\ ,
\end{aligned}$$

wobei wir wiederum die Bernoulli-Ungleichung verwendet haben. Daher ist $b_{n-1} > b_n$, also ist die Folge monoton fallend.

c) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Lösung. Beachte, dass $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) a_n$, also $a_n \leq b_n$, und insbesondere $a_1 \leq a_n \leq b_1$ für alle n. Die Folge a_n ist monoton steigend und beschränkt, daher ist sie konvergent. Weiter ist $1+\frac{1}{n} \to 1$. Daher ist auch

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

wie behauptet.

Bemerkung. Der Grenzwert $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818\ldots$ heisst *Eulersche Zahl.*

(http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche Zahl)

Bitte wenden!

4. Multiple Choice

1. Welche der Aussagen gilt?

√ (a) $\lim_{n \to\infty} n^{1/n} = 1$

Richtig. Dies ist aus der Vorlesung bekannt.

√ (b) $\lim_{n \to\infty} n^{1/(2n)} = 1$

Richtig. Dies folgt aus $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/(2n)} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{1/n}\right)^{1/2} = \left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right)^{1/2} = 1^{1/2} = 1 \; .$$

√ (c) $\lim_{n \to\infty} (n^{1/(2n)} + n^{2/n}) = 2$

Richtig. Es gilt gemäss den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \left(n^{1/(2n)} + n^{2/n}\right) = \lim_{n\to\infty} n^{1/(2n)} + \lim_{n\to\infty} n^{2/n} \; .$$

Aus der vorherigen Teilaufgabe wissen wir $\lim_{n\to\infty} n^{1/(2n)} = 1$ und weiter ist mit den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} n^{2/n} = \lim_{n \to\infty} \left(n^{1/n}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right)^2 = 1^2 = 1 \; .$$

√ (d) $\lim_{n \to\infty} n^{-1/(3n)} \left(1 - n^{2/(3n)}\right) = 0$

Richtig. Es gilt für jedes reelle a

$$\lim_{n\to\infty} n^{a/n} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{1/n}\right)^a = \left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right)^a = 1^a = 1$$

und folglich mit den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} n^{-1/(3n)} \left(1 - n^{2/(3n)}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n^{-1/(3n)} \lim_{n\to\infty} \left(1 - n^{2/(3n)}\right) = 1 \cdot 0 = 0 \; . \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Sei q eine komplexe Zahl mit $|q| < 1$. Welche der Aussagen gilt?

$\checkmark$ (a) $\lim_{n\to\infty} n^2 q^n = 0$

Richtig. Dies ist aus der Vorlesung bekannt.

$\checkmark$ (b) $\lim_{n\to\infty} n^5(q^n + q^{n/2}) = 0$

Richtig. Nach den Rechenregeln für Grenzwerte ist

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^5(q^n + q^{n/2}) = \lim_{n\to\infty} n^5 q^{n/2}(1 + q^{n/2}) = \lim_{n\to\infty}(1 + q^{n/2}) \lim_{n\to\infty} n^5 q^{n/2} \\
&= (1 + \lim_{n\to\infty} q^{n/2}) \lim_{n\to\infty} n^5 q^{n/2} = \left(1 + (\lim_{n\to\infty} q^n)^{1/2}\right)\left(\lim_{n\to\infty} n^{10} q^n\right)^{1/2} \\
&= (1+0)0 = 0\,.
\end{aligned}$$

(c) $\lim_{n\to\infty}(q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1) = 0$

Falsch. Aus der Vorlesung ist

$$q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1 = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

bekannt und es folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}(q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q} \neq 0\,.$$

3. Welche der Aussagen gilt für die Folge i^n (i imaginäre Einheit)?

$\checkmark$ (a) Sie ist beschränkt.

Richtig. Es gilt $|i^n| = |i|^n = 1$ für jedes n.

(b) Sie konvergiert.

Falsch. Es gilt $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ für jede ganze Zahl k. Die Folge durchläuft also die Werte $1, i, -1, -i$ und konvergiert deshalb nicht.

Bitte wenden!

4. Welche der Aussagen gilt für die Folge $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^n$?

√ (a) Sie ist beschränkt.

Richtig. Es gilt $\left|\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^n\right| = |\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i|^n = 1$ für jedes n.

(b) Sie konvergiert.

Falsch. Das $n$te Glied der Folge ist in Polarform $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^n = e^{in \operatorname{arctan}(4/3)}$. Diese Zahl auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene nähert sich für $n \to \infty$ keiner komplexen Zahl. Also konvergiert die Folge nicht.

5. Welche der Aussagen gilt für die Folge $\left(\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i\right)^n$?

√ (a) Sie ist beschränkt.

Richtig. Dies folgt aus der Konvergenz der Folge.

√ (b) Sie konvergiert.

Richtig. Es gilt $\left|\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^n\right| = |\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i|^n = \frac{1}{5^n}$. Also strebt die Folge gegen 0.