Lösung 7

1. **a)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n}$?
Lösung:
Zuerst prüft man, ob die Glieder $\frac{1}{a^n}$ der Reihe gegen null konvergieren. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\frac{1}{|a|} < 1$ ist, d.h. $|a| > 1$. Also kann die Reihe nur für $|a| > 1$ konvergieren. Die Nte Partialsumme der Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{a^n} = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{N+1} - 1}{\frac{1}{a} - 1}$$

(Vorlesung) und diese konvergiert gegen $\frac{-1}{\frac{1}{a}-1} = \frac{a}{a-1}$ für $N \to \infty$. Also konvergiert die Reihe für $|a| > 1$.

b) Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$?
Lösung:
Wir verwenden das Majorantenkriterium (Vorlesung), um die Konvergenz zu zeigen. Es gilt $\frac{n+1}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3}$ für alle n. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (Vorlesung), konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3}$.

c) Für welche $s > 0$ und $q > 0$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^s}{q^n}$$

konvergent?

Lösung. Zunächst verwenden wir das Quotientenkriterium. Mit $a_n = \dfrac{n^s}{q^n}$ ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^s/q^{n+1}}{n^s/q^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s \cdot \frac{q^n}{q^{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \cdot \frac{1}{q} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{q}$$

unabhängig von $s > 0$. Wir haben $\dfrac{1}{q} < 1$ genau für $q > 1$, also ist die Reihe für alle $q > 1$ und alle $s > 0$ konvergent.

Für $0 < q \leq 1$ ist $q^n \leq 1$ und damit $a_n \geq n^s$. Für $s > 0$ ist aber n^s unbeschränkt, also kann $\sum_{n=1}^{\infty} n^s$ nicht konvergieren und wegen $a_n \geq n^s$ kann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ erst recht nicht konvergieren.

Bitte wenden!

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^s}{q^n}$ ist also genau für $q > 1$ und $s > 0$ konvergent und sonst nicht.

2. Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n$.

Lösung. Wurzelkriterium. $a_n = \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n$, also

$$\sqrt[n]{a_n} = n^{\frac{1}{n}} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1,$$

also ist die Reihe konvergent.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Lösung. Leibnizkriterium. Die Folge $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ist streng monoton fallend, denn

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

konvergiert wegen $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ streng monoton gegen Null.

Nach Leibniz ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ konvergent.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Lösung. Wegen

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

ist die Folge $a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ keine Nullfolge, die Reihe konvergiert also nicht.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^\lambda n!}{n^\lambda}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

Lösung. Sei $\lambda \leq 0$. Wegen

$$\frac{2^\lambda n!}{n^\lambda} = 2^\lambda n! n^{-\lambda} \geq 2^\lambda n!$$

ist die Folge $a_n = \dfrac{2^\lambda n!}{n^\lambda}$ keine Nullfolge, also ist die Reihe divergent für $\lambda \leq 0$.

Sei $\lambda > 0$. Mit $a_n = \dfrac{2^\lambda n!}{n^\lambda}$ ist

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^\lambda (n+1)!/(n+1)^\lambda}{2^\lambda n!/n^\lambda} \\ &= \frac{n^{\lambda+1} + n^\lambda}{(n+1)^\lambda} \xrightarrow{n\to\infty} \infty\end{aligned}$$

also ist die Reihe divergent für $\lambda > 0$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

Lösung. Quotientenkriterium. Mit $a_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$ ist

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1}(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{2^n n!/n^n} \\ &= 2(n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{e} < 1\end{aligned}$$

also ist die Reihe konvergent.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n-5}$.

Lösung. Wurzelkriterium. Setze $b_n = a_{n+5} = \left(\frac{n+5}{2n+11}\right)^n$. Dann ist

$$\sqrt[n]{b_n} = \frac{n+5}{2n+11} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2},$$

also ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent nach dem Wurzelkriterium. Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_5 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ist auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Bitte wenden!

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5+n^3-1}}$.

Lösung. Majorantenkriterium. Wegen

$$\frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{(n^5+n^3-1)^{\frac{1}{3}}} \leq \frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{5}{3}}} \leq \frac{2n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{5}{3}}} = \frac{2}{n^{\frac{7}{6}}}$$

ist $2\zeta\left(\frac{7}{6}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ eine konvergente Majorante. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5+n^3-1}}$$

ist also konvergent.

Siehe nächstes Blatt!

3. Multiple Choice

1. Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Folge und $a_n > 0$ für alle n. Welche der Aussagen gilt?

√ (a) $(a_n)_n$ ist beschränkt.

Richtig. Es gilt $0 < a_n \leq a_1$ für alle n.

√ (b) $(a_n)_n$ konvergiert.

Richtig. Jede beschränkte monotone Folge konvergiert (Vorlesung).

(c) Sei $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Dann konvergiert $(s_n)_n$.

Falsch. Z. B. ist $s_n = n$ für die konstante Folge $a_n = 1$.

√ (d) Sei $t_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$. Dann ist $t_{2n+1} < t_{2n}$, $(t_{2n})_n$ ist monoton fallend und $(t_{2n+1})_n$ ist monoton wachsend.

Richtig. Es gilt $t_{2n+1} - t_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} < 0$. Weiter gilt $t_{2n+2} - t_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$, also ist $(t_{2n})_n$ monoton fallend und $t_{2n+3} - t_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$, also ist $(t_{2n+1})_n$ monoton wachsend.

√ (e) Angenommen $(a_n)_n$ konvergiert gegen 0. Dann konvergieren $(t_{2n})_n$ und $(t_{2n+1})_n$ gegen denselben Grenzwert. Also konvergiert auch $(t_n)_n$.

Richtig. Es gilt $t_{2n} > t_{2n+1} \geq t_1$. Also ist $(t_{2n})_n$ beschränkt und folglich konvergent. Auch gilt $t_{2n+1} < t_{2n} \leq t_2$. Also ist $(t_{2n+1})_n$ beschränkt und folglich konvergent. Die Differenz $t_{2n+1} - t_{2n} = -a_{2n+1}$ konvergiert gegen 0, da angenommen wurde, dass $(a_n)_n$ gegen 0 konvergiert. Deshalb stimmen die Grenzwerte von $(t_{2n})_n$ und $(t_{2n+1})_n$ überein und $(t_n)_n$ konvergiert gegen diesen Wert.

Bitte wenden!

2. Welche der Aussagen gilt?

√ (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

Richtig. Dies gilt nach dem Leibnizkriterium, da $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_n$ eine monoton fallende Folge ist, die gegen null konvergiert.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n^3}$ konvergiert.

Falsch. Wir betrachten die Kehrwerte der Glieder

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n^3}} &= \frac{\sqrt{(n+1)^3} + \sqrt{n^3}}{(n+1)^3 - n^3} = \frac{\sqrt{(n+1)^3} + \sqrt{n^3}}{3n^2 + 3n + 1} \\ &< \frac{\sqrt{(n+1)^3} + \sqrt{n^3}}{3n^2} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{(n+1)^3}{n^4}} + \sqrt{\frac{n^3}{n^4}}\right) .\end{aligned}$$

Nun ist $\frac{(n+1)^3}{n^4}$ durch eine Konstante C und $\frac{n^3}{n^4} = n^{-1}$ durch 1 beschränkt, also folgt

$$\sqrt{\frac{(n+1)^3}{n^4}} + \sqrt{\frac{n^3}{n^4}} \leq \sqrt{C} + 1 .$$

Es folgt $\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n^3} > \frac{3}{\sqrt{C}+1}$. Also konvergieren die Glieder der Folge nicht gegen null. Deshalb konvergiert die Reihe nicht.

3. Sei $n_0 > 0$ und $C \geq 0$. Sei $(a_n)_n$ eine positive Folge, die $a_{n+1} \leq C a_n$ für alle $n \geq n_0$ erfüllt. Welche der Aussagen gilt?

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn $C \leq 1$ ist.

Falsch. Z. B. erfüllt die konstante Folge $a_n = 1$ die Ungleichung $a_{n+1} \leq C a_n$ für jedes n mit $C = 1$. Aber $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ divergiert.

√ (c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn $C < 1$ ist.

Richtig. Die Annahme $a_{n+1} \leq C a_n$ für alle $n \geq n_0$ impliziert $a_n \leq C^{n-n_0} a_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$ und folglich ist die geometrische Reihe

$$\sum_{n=n_0} C^{n-n_0} a_{n_0} = a_{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} C^{n-n_0}$$

eine Majorante für die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Die geometrische Reihe konvergiert, da $C < 1$ ist. Die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ konvergiert also nach dem Majorantenkriterium ebenfalls. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ für ein n_0 konvergiert, haben wir gezeigt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.