Lösung 8

1. Definiere

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \, .$$

a) Verifiziere $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$.
Lösung:
Wir setzen $e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}$ ein

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iz)^l + (-iz)^l}{2(l!)} = \sum_{l=0,\, l \text{ gerade}}^{\infty} \frac{(iz)^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \, .$$

In der zweiten Gleichung haben wir verwendet, dass wenn zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, auch ihre Summe konvergiert und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$$

gilt.

b) Verifiziere $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
Lösung:
Wir setzen $e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!}$ ein

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iz)^l - (-iz)^l}{2i(l!)} = \sum_{l=0,\, l \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{(iz)^l}{il!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \, .$$

In der zweiten Gleichung haben wir verwendet, dass wenn zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, auch ihre Differenz konvergiert und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k)$$

gilt.

Bitte wenden!

c) Berechne $\cos z \sin z$ aus **a** und **b**.
Lösung: Wir verwenden die Cauchy-Produktformel

$$\cos z \sin z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l z^{2l+1}}{(2l+1)!}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2k)!(2n+1-2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!(2n+1-2k)!} .$$

Wir berechnen mit der Pascal'schen Identität $\binom{2n+1}{2k} = \binom{2n}{2k} + \binom{2n}{2k-1}$ für $k \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!(2n+1-2k)!} = \frac{1}{(2n+1)!}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}$$
$$= \frac{1}{(2n+1)!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}\right) = \frac{1}{(2n+1)!}\sum_{m=0}^{2n}\binom{2n}{m}$$
$$= \frac{(1+1)^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} .$$

Es folgt

$$\cos z \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} z^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

d) Berechne $\frac{\sin(2z)}{2}$ aus **b**.
Lösung:
Wir setzen das Resultat aus **b** ein

$$\frac{\sin(2z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2z)^{2k+1}}{2((2k+1)!)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} z^{2k+1}}{(2k+1)!} .$$

Aus **c** und **d** schliessen wir $\frac{\sin(2z)}{2} = \cos z \sin z$, was im Fall von $z \in \mathbb{R}$ als Doppelwinkelformel (Vorlesung und Serie **2**, Aufgabe **3a**) bekannt ist.

2. Vereinfache soweit wie möglich

a) $(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n$,
Lösung:
Wir schreiben

$$(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Siehe nächstes Blatt!

wobei $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ und $a_n = 0$ für $n \geq 2$. Mit Hilfe der Cauchy Produkt Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

wobei $c_n = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot a_{n-k}$. Es folgt dass $c_0 = 1$ und $c_n = 0$ für $n \geq 1$. Also

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n (1-z) = 1.$$

Oder

$$(1-z) \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1$$

b) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$.

Lösung:
Mit Hilfe der Cauchy Produkt Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

wobei $c_n = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = n + 1$. Also

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

c) $(1 - z - z^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n\right)$,

Lösung:
Wir schreiben

$$(1 - z - z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

wobei $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = -1$ und $a_n = 0$ für $n \geq 3$. Mit Hilfe der Cauchy Produkt Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

wobei $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k F_{n-k}$. Wir haben $c_0 = 1$ und

$$c_n = a_0 F_n + a_1 F_{n-1} + a_2 F_{n-2} = F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

für $n > 0$. Also

$$\left(1 - z - z^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = 1.$$

Bitte wenden!

3. **a)** Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{1-z-z^2}$$

Lösung:
Betrachte $1-z-z^2 = -\left(z^2+z-1\right) = -\left(z-q_1\right)\left(z-q_2\right)$, wobei $q_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und $q_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ die Nullstelle von z^2+z-1 sind.

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{\left(q_1-z\right)\left(z-q_2\right)} = \frac{A}{q_1-z} + \frac{B}{z-q_2}$$

Es folgt dass $A(z-q_2)+B(q_1-z) = 1$ ist. Also

$$A-B=0, \quad -Aq_2+Bq_1 = 1$$

Also

$$\begin{aligned} -Aq_2+Bq_1 &= 1 \\ -Aq_2+Aq_1 &= 1 \\ A\left(-q_2+q_1\right) &= 1 \\ A = \frac{1}{-q_2+q_1} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Es folgt $B = A = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z-z^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q_1-z}+\frac{1}{z-q_2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q_1-z}+\frac{1}{z-q_2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-z}+\frac{1}{z-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right) \end{aligned}$$

b) Sei $\psi_1 := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der goldener Schnitt. Sei $\psi_2 := \frac{2}{1-\sqrt{5}}$. Entwickle

$$\frac{\psi_1}{1-z\psi_1}, \text{ und } \frac{\psi_2}{\psi_2 z-1}$$

in Potenzreihe.
Lösung:

$$\frac{\psi_1}{1-z\psi_1} = \psi_1\frac{1}{1-z\psi_1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\psi_1\right)^{n+1}z^n$$

Siehe nächstes Blatt!

und

$$\frac{\psi_2}{-1+z\psi_2} = -\psi_2 \frac{1}{1-z\psi_2} = \sum_{n=0}^{\infty} -\left(\psi_2\right)^{n+1} z^n$$

c) Schließe

$$F_n = \frac{\left(\psi_1\right)^{n+1} - \left(\psi_2\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Lösung:
Es gilt $\psi_1\psi_2 = -1$. Dann

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-z} + \frac{1}{z-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{-z-\psi_2} + \frac{1}{z+\psi_1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\psi_1}{\psi_1}\frac{1}{-z-\psi_2} + \frac{\psi_2}{\psi_2}\frac{1}{z+\psi_1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\psi_1}{1-\psi_1 z} - \frac{\psi_2}{1-\psi_2 z}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\psi_1\right)^{n+1} z^n - \left(\psi_2\right)^{n+1} z^n\right).
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n &= \frac{1}{1-z-z^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}-z} + \frac{1}{z-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\psi_1\right)^{n+1} - \left(\psi_2\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} z^n
\end{aligned}$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$F_n = \frac{\left(\psi_1\right)^{n+1} - \left(\psi_2\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

4. Multiple Choice

Bitte wenden!

1. Welche der Reihen konvergiert?

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$

Falsch. Es gilt $\frac{n}{n^2-1} > \frac{n-1}{n^2-1} = \frac{1}{n+1}$. Da die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergiert (harmonische Reihe), divergiert die gegebene Reihe ebenfalls. (Man sagt, dass $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ eine divergente Minorante der Reihe ist.)

√ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{s}{n}(2n+1)x^n$, $s, x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$

Richtig. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{s(s-1)\dots(s-n)(2n+3)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{s(s-1)\dots(s-n+1)(2n+1)x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|n-s|(2n+3)|x|}{(n+1)(2n+1)} = |x| < 1$$

und folglich konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

√ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Richtig. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n .$$

In Serie 6, Aufgabe **2**, wurde gezeigt, dass die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monoton wachsend ist und konvergiert. Für $n = 1$ ist das Folgenglied 2, also ist der Grenzwert $e > 2$. Nun gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e} .$$

Da $\frac{1}{e} < 1$ konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

√ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_{2k} = \frac{1}{3^{2k}}$, $a_{2k+1} = \frac{1}{3^{2k-1}}$, $k \in \mathbb{N}$

Richtig. Wir bemerken $(a_{2k})^{1/2k} = \frac{1}{3}$ und

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k+1}^{1/(2k+1)} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{9}{3^{2k+1}}\right)^{1/(2k+1)} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} 9^{1/(2k+1)} = \frac{1}{3} .$$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \frac{1}{3} < 1$ und das Wurzelkriterium besagt, dass die Reihe konvergiert. Wir bemerken noch, dass $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = 3$ und $\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{1}{3}$ gilt. Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert also nicht und folglich ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar.

√ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$, F_n die Fibonacci-Folge gegeben durch $F_0 = F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $|x|$ klein genug

Siehe nächstes Blatt!

Richtig. In Serie 5, Aufgabe **2c**, wurde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

gezeigt. Wegen

$$\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} = \frac{F_{2n+1} + F_{2n}}{F_{2n+1}} = 1 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}$$

gilt $\lim_{n\ \to\infty} \frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{c} = c$. Es folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}|x|^{n+1}}{F_n|x|^n} = c|x|$. Also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium für $|x| < \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

√ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{1}{n}$ für $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$, und $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ sonst.

Richtig. Wir betrachten die Differenz der Nten Partialsummen

$$\sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \frac{1}{k^2} - \frac{(-1)^{k^2}}{k^2} = 2 \sum_{k=1, k \text{ ungerade}}^{\lfloor\sqrt{N}\rfloor} \frac{1}{k^2} \, .$$

Hier ist $\lfloor\sqrt{N}\rfloor$ ist die grösste ganze Zahl, die $\leq \sqrt{N}$ ist. Für $N \to \infty$ konvergiert die Partialsumme $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}$ nach dem Leibnizkriterium. Die rechte Seite konvergiert ebenfalls, da sie durch die konvergente Reihe $2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ majorisiert ist. Es folgt, dass die Partialsumme $\sum_{n=1}^{N} a_n$ für $N \to \infty$ konvergiert.

2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$?

√ (a) Für $|z| < 1$.

Richtig. Es gilt nach einer Folgerung aus dem Majorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für $|z| < 1$ konvergiert, wenn $|a_k| \leq 1$ für alle k gilt. Diese Voraussetzung ist hier erfüllt, da $a_k = 1$ für $k = n!$ und $a_k = 0$ sonst.

(b) Für $|z| \geq 1$.

Falsch. Für $|z| \geq 1$ konvergieren die Glieder $z^{n!}$ nicht gegen null, da $|z^{n!}| = 1$ für $|z| = 1$ und $\lim_{n\ \to\infty} |z^{n!}| = \infty$ für $|z| > 1$. Also konvergiert die Reihe nicht.

(c) Für alle z.