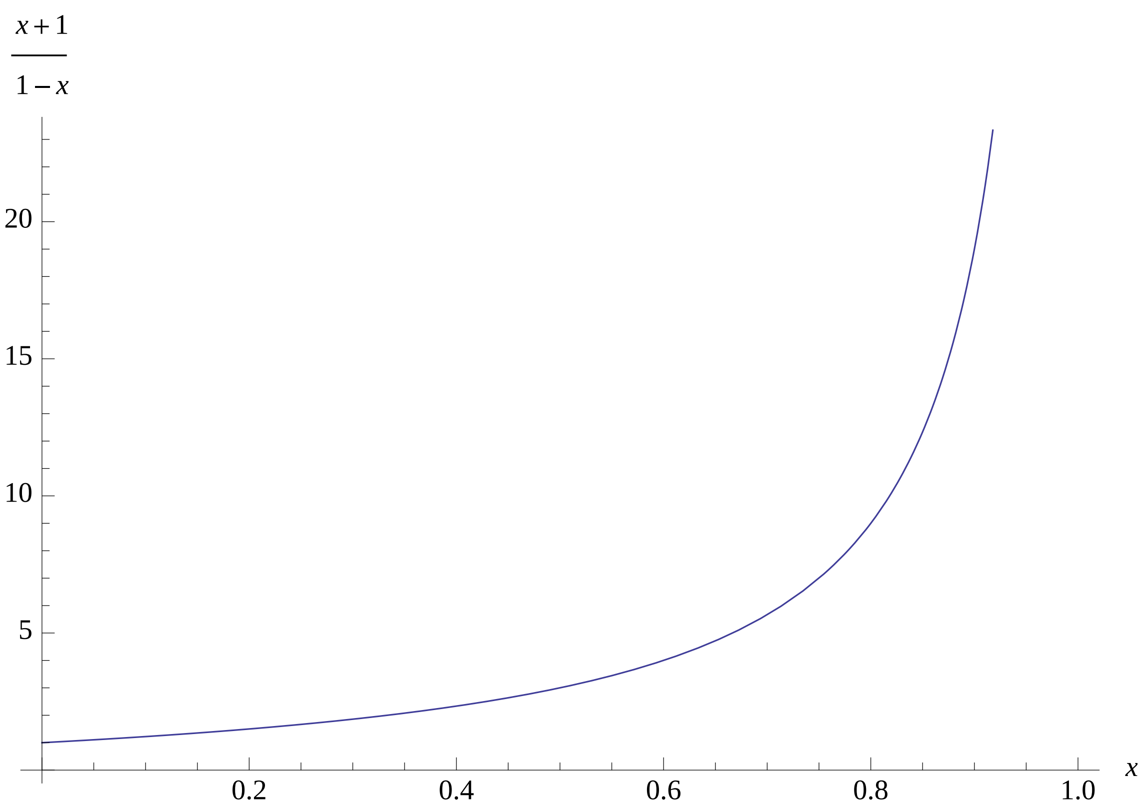
Lösung 9

1. Betrachte die Abbildung $f : (0,1) \to (0,\infty)$ gegeben durch $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

a) Zeichne den Graphen von f.
Lösung:
Der Funktionswert bei $x = 0$ ist $f(0) = 1$. Für $x \to 1$ geht der Funktionswert $f(x)$ gegen unendlich.



b) Für welche x gilt $f(x) = 2$?
Lösung:
Die Gleichung $f(x) = \frac{1+x}{1-x} = 2$ ist äquivalent zur Gleichung

$$1 + x = 2(1 - x)\ .$$

Wir lösen diese Gleichung nach x und finden $x = \frac{1}{3}$.

c) Ist f injektiv oder surjektiv? Ist f monoton steigend oder fallend?
Lösung:
Wir prüfen, ob f injektiv ist, d.h. ob aus $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$ folgt. Die Gleichung $f(x) = f(y)$ ist äquivalent zu

$$1 + x - y - xy = (1 + x)(1 - y) = (1 + y)(1 - x) = 1 + y - x - yx$$

und diese Gleichung ist nach Kürzen äquivalent zu $x = y$. Wir haben gezeigt, dass f injektiv ist. Wir prüfen, ob f surjektiv ist, d.h. für jeden Wert $c > 0$ ein x mit $0 < x < 1$ existiert, so dass $f(x) = c$ gilt. Wegen

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} > \frac{1-x}{1-x} = 1$$

ist dies für $c \leq 1$ nicht der Fall. Also ist f nicht surjektiv. Wir prüfen noch, ob f monoton steigend oder fallend ist. Aus $0 < x < y < 1$ folgt $1+x < 1+y$ und $1 - x > 1 - y > 0$ und deshalb

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \ < \frac{1+y}{1-x} \ < \frac{1+y}{1-y} = f(y) \ .$$

Die Funktion f ist also strikt monoton steigend. (Daraus können wir auch schliessen, dass f injektiv ist, was wir bereits vorher direkt gezeigt haben.) Diese Eigenschaften von f sind auch aus der Skizze des Graphen in **a** ersichtlich.

d) Bestimme das Bild von f.
Lösung:
Siehe Lösung zu **e**.

e) Berechne die Umkehrfunktion $g : \text{Bild}(f) \to (0, 1)$.
Lösung:
Aus der Lösung von **c** folgt, dass das Bild von f in $(1, \infty)$ enthalten ist. Sei nun $c > 1$. Die Gleichung $f(x) = c$ ist äquivalent zu

$$1 + x = c(1 - x)$$

und Auflösen der Gleichung nach x ergibt $x = \frac{c-1}{c+1}$. Es gilt

$$0 < x = \frac{c-1}{c+1} < \frac{c+1}{c+1} = 1 \ .$$

Also ist jeder Wert $c > 1$ im Bild von f. Die Abbildung $f : (0, 1) \to \text{Bild}(f) = (1, \infty)$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion von f ist

$$g : (1, \infty) \to (0, 1)$$

gegeben durch $g(c) = \frac{c-1}{c+1}$.

Siehe nächstes Blatt!

2. Rechne nach:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

und schreibe die Reihe bis zur Ordnung 9 explizit hin.
Lösung:
Wir verwenden die aus der Vorlesung bekannte Reihendarstellung

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} ,$$

die für $|x| < 1$ gilt. Wenn wir x durch $-x$ ersetzen, erhalten wir

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} ,$$

wobei wir $(-1)^{2n+1} = -1$ verwendet haben. Es folgt

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=1,\ n \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{x^n}{n} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} .$$

In der letzten Gleichheit haben wir folgendes verwendet: Wenn k durch $\mathbb{N}_0$ läuft, so läuft $n = 2k+1$ durch die ungeraden natürlichen Zahlen. Bis zur Ordnung 9 ist die Reihe

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots\right) .$$

3. Zeige

$$\binom{s+t}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{s}{j}\binom{t}{k-j}$$

a) für $s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{C}$ durch Betrachten der beiden Seiten der Identität als Funktion von t.
Lösung:
In Serie 4, Aufgabe **2**, wurde die Identität für $s, t \in \mathbb{N}$ gezeigt. Sei $s \in \mathbb{N}$ fest. Dann ist die linke und rechte Seite der Identität ein Polynom vom Grad k in t und wir wissen, dass die Identität für alle $t \in \mathbb{N}$ gilt. Aus dem Identitätssatz für Polynome folgt nun, dass sie für alle $t \in \mathbb{C}$ gilt. Der *Identitätssatz für Polynome* besagt nämlich, dass, wenn eine Gleichung von Polynomen $p(x) = q(x)$ vom Grad k für $k+1$ verschiedene komplexe Werte von x gilt, die Gleichung tatsächlich für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt, d.h. die Polynome p und q identisch sind.

Bitte wenden!

b) für $s, t \in \mathbb{C}$ durch Betrachten der beiden Seiten der Identität als Funktion von s.
Lösung:
Sei $t \in \mathbb{C}$ fest. Die linke und rechte Seite der Identität ist ein Polynom vom Grad k in s und nach **a** wissen wir, dass sie für alle $s \in \mathbb{N}$ gilt. Gemäss dem Identitätssatz für Polynome folgt, dass die Identität für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt.

4. Multiple Choice Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heisst *gerade* respektive *ungerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ respektive $f(-x) = -f(x)$ für alle reellen x gilt.

1. Welche der Aussagen gilt?

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, ist gerade.

Falsch. Die Funktion ist offensichtlich ungerade, aber nicht gerade.

√ (b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist gerade.

Richtig. Es gilt nämlich $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

√ (c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^3$, ist ungerade.

Richtig. Es gilt $f(-x) = (-x) + (-x)^3 = -(x + x^3) = -f(x)$.

(d) $\sin x$ ist gerade.

√ (e) $\cos x$ ist gerade.

(f) $\tan x$ ist gerade.

Siehe nächstes Blatt!

2. Seien f und g Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Welche der Aussagen gilt?

√ (a) Die Summe $f(x) + g(x)$ und die Differenz $f(x) - g(x)$ ist eine gerade bzw. ungerade Funktion, wenn sowohl f wie auch g gerade bzw. ungerade ist.

Richtig. Es gilt

$$f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) \quad f(-x) - g(-x) = f(x) - g(x) \, ,$$

wenn f und g gerade sind und

$$\begin{aligned} f(-x) + g(-x) &= -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) \\ f(-x) - g(-x) &= -f(x) + g(x) = -(f(x) - g(x)) \, , \end{aligned}$$

wenn f und g ungerade sind.

√ (b) Für das Produkt der Funktionen $f(x)g(x)$ gilt

$$f(x)g(x) \begin{cases} \text{gerade} & f, g \text{ gerade} \\ \text{ungerade} & f \text{ gerade, } g \text{ ungerade} \\ \text{gerade} & f, g \text{ ungerade} \end{cases} .$$

Richtig. Es gilt

$$f(-x)g(-x) = \begin{cases} f(x)g(x) & f, g \text{ gerade} \\ f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) & f \text{ gerade, } g \text{ ungerade} \\ (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) & f, g \text{ ungerade} \end{cases} .$$

(c) Ist das Produkt $f(x)g(x)$ gerade, so ist sowohl f wie auch g gerade oder ungerade.

Falsch. Z. B. ist die Funktion $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ gerade, aber die Faktoren $x+1$ und $x-1$ sind weder gerade noch ungerade.

√ (d) Ist f gerade oder ungerade, so ist f durch die Funktionswerte $f(x)$ für alle $x \geq 0$ eindeutig bestimmt.

Richtig. Die Eigenschaft $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$ bestimmt $f(-x)$ für jedes $x \geq 0$ eindeutig.

(e) Es existiert eine ungerade Funktion f mit $f(x) > 0$ für alle reellen x.

Falsch. Wenn f ungerade ist, gilt $f(-x) = -f(x) < 0$ wegen $f(x) > 0$. Anderseits ist nach Annahme $f(-x) > 0$, ein Widerspruch. Siehe auch die Lösung der nächsten Teilaufgabe.

Bitte wenden!

√ (f) Ist f ungerade, so gilt $f(0) = 0$.

Richtig. Es gilt $f(0) = f(-0) = -f(0)$, was $f(0) = 0$ bedeutet.

√ (g) Die Funktion $f(x)$ ist gerade bzw. ungerade genau dann, wenn Realteil $\mathrm{Re}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Re}f(x)$, und Imaginärteil $\mathrm{Im}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{Im}f(x)$, gerade bzw. ungerade sind.

Richtig. Dies folgt aus dem Vergleich von Real- und Imaginärteil der Gleichungen $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$.

√ (h) Ist f sowohl gerade als auch ungerade, so ist f null.

Richtig. Es gilt $f(-x) = f(x) = -f(x)$, also $f(x) = 0$ für alle x.

3. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Reihe, die für alle x mit $|x| < R$ konvergiert. Welche der Aussagen gilt?

√ (a) Die Funktion $f : (-R, R) \to \mathbb{C}$ ist genau dann gerade, wenn $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.

Richtig. Sei $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} (-x)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = f(x) \ .$$

Ist umgekehrt

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

vorausgesetzt, so folgt $(-1)^n a_n = a_n$ durch Koeffizientenvergleich. Die Gleichung $(-1)^n a_n = a_n$ ist für n gerade immer wahr, während sie für n ungerade $-a_n = a_n$ ist, was $a_n = 0$ bedeutet.

√ (b) Die Funktion $f : (-R, R) \to \mathbb{C}$ ist genau dann ungerade, wenn $a_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist.

Richtig. Man argumentiert genau wie in der vorhergehenden Teilaufgabe.