Musterlösung 13

1. a) Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{\vec{x}} := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: A\vec{x}; \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung eines Systems der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit einer 2×2-Matrix A mit verschiedenen Eigenwerten ist allgemein gegeben durch

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2, \tag{1}$$

wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte (EW) der Matrix A sind, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ die zugehörigen Eigenvektoren (EV) bezeichnen und c_1, c_2 Konstanten sind, die durch die Anfangsbediengung $\vec{x}(0)$ bestimmt werden. Es gelten also:

$$\begin{aligned} A\vec{v}_1 &= \lambda_1\vec{v}_1, \qquad \vec{v}_1 \neq 0 \\ A\vec{v}_2 &= \lambda_2\vec{v}_2, \qquad \vec{v}_2 \neq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Es genügt diese Relationen zu verwenden, um zu überprüfen, dass (1) wirklich eine Lösung des Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ist. Ferner folgt aus (2), dass die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ (wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$) linear unabhängig sind.
Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 12 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(1-\lambda) - 3 \cdot 12 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 36 = \lambda^2 - 2\lambda - 35, \end{aligned}$$

also

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 35}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+35}}{2} = 1 \pm 6,$$

d.h. $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -5$.
Einsetzen dieser Werte in (2) liefert die EV:

$$\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

und die allgemeine Lösung (1) des AWP lautet:

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Anfangsbediengung liefert

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2 = \frac{1}{2}.$$

Also erhalten wir $\vec{x}(t) = \dfrac{1}{2}\, e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\, e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Wir betrachten das AWP

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} =: A\vec{x} \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es ist $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$ also sind $\lambda_1 = i$ und $\lambda_2 = -i$ die EW.
Für die EV erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad \text{(oder lineare Vielfache)},$$

so dass

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

die allgemeine (*komplexe*) Lösung ist.
Aus der Anfangsbedingung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2, \\ 3 &= i(c_1 - c_2) \end{aligned}$$

und somit $c_1 = \frac{1}{2}(1 - 3i)$, $c_2 = \frac{1}{2}(1 + 3i)$.
Die Lösung des AWP ist also

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{i}\right) e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{i}\right) e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + 3\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ -\frac{e^{it}+e^{-it}}{2i} + 3\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ -\sin t + 3\cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wegen $\ddot{x} = \dot{y} = -x$, gilt

$$\ddot{x} + x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = y(0) = 3.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist (vgl. Serie 2)

$$x(t) = a\cos t + b\sin t, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

und mit $1 = x(0) = a$ und $3 = y(0) = b$ erhalten wir wiederum

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t + 3\sin t \\ y(t) &= \dot{x}(t) = -\sin t + 3\cos t. \end{aligned}$$

Allgemein ist im Fall nichtreeller (also komplex konjugierter) EW λ, $\bar{\lambda}$ mit zugehörigen EV $\vec{w}$, $\bar{\vec{w}}$ die allgemeine Lösung eines (2×2)-Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ eine Linearkombination der Funktionen $e^{\lambda t}\vec{w}$ und $e^{\bar{\lambda} t}\bar{\vec{w}}$ und also, falls die Koeffizientenmatrix A reell ist, auch der Funktionen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}\vec{w}\right) &= e^{\gamma t}\left(\cos(\omega t)\vec{u} - \sin(\omega t)\vec{v}\right) \qquad \text{und} \\ \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t}\vec{w}\right) &= e^{\gamma t}\left(\sin(\omega t)\vec{u} + \cos(\omega t)\vec{v}\right), \end{aligned}$$

wobei $\lambda = \gamma + i\omega$ und $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$. Es gilt also

$$\vec{x}(t) = e^{\gamma t}\left(\left(c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)\right)\vec{u} + \left(-c_1\sin(\omega t) + c_2\cos(\omega t)\right)\vec{v}\right) \tag{3}$$

mit Konstanten c_1, c_2, die durch $\vec{x}(0) = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}$ bestimmt sind.
Für das gegebene AWP sind $\gamma = 0$, $\omega = 1$,

$$\vec{u} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also $c_1 = 1$, $c_2 = 3$. Einsetzen in (3) liefert wiederum die obige Lösung.

c) Wir schreiben

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad A := \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakeristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 4 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2, \end{aligned}$$

also ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 =: \lambda$ ein doppelter Eigenwert.
Dies ist ein weiterer Spezialfall des (2×2)-Problems. Die Matrix A ist *nicht diagonalisierbar*. Es gibt nur einen EW λ und also nur einen EV $\vec{v}$ (bis auf lineare Vielfache, und ausser im trivialem Fall $A = \lambda E_2$). In diesem Spezialfall wird die allgemeine Lösung nicht durch $\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$ gegeben, da dies zu

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\vec{v} + c_2 e^{\lambda t}\vec{v} =: c e^{\lambda t}\vec{v}$$

und also $\vec{x}(0) = c\vec{v}$ führen würde. Dies *kann nicht* die allgemeine Lösung sein, da als Anfangsbedingungen nur Vielfache von $\vec{v}$ in Betracht kommen.

Stattdessen wird in diesem Spezialfall die allgemeine Lösung gegeben durch

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda t}\vec{v} + c_2 t e^{\lambda t}\vec{v} + c_2 e^{\lambda t}\vec{w}, \tag{4}$$

wobei $\vec{w}$ so zu wählen ist, dass $(A - \lambda E_2)\vec{w} = \vec{v}$. Es ist leicht einzusehen, dass die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind und (4) die DGL $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ erfüllt.

Für die gegebene Gleichung ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}, \qquad \text{also z.B.} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{also z.B.} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

und somit $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 2c_1 + 2c_2 t \\ c_1 + c_2 t - \frac{1}{2}c_2 \end{pmatrix}$.

Aus $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ c_1 - \frac{1}{2}c_2 \end{pmatrix}$ folgt $c_1 = c_2 = 2$.

Schliesslich ist $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 4 + 4t \\ 1 + 2t \end{pmatrix}$.

2. Das charakteristische Polynom der Koeffizientenmatrix

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1+\lambda)\left((2-\lambda)(1+\lambda) - 2\right) = (1+\lambda)(1-\lambda)\lambda \end{aligned}$$

hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$.

Für die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ folgt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_3 = c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

und da alle Eigenwerte verschieden sind, ist jede Lösung von der Form

$$\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

3. Sind die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A verschieden, so hat das AWP

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{5}$$

für jede Anfangsbedingung $\vec{x}_0$ die Lösung $\vec{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2$, wobei $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ die Eigenvektoren zu λ_1, λ_2 und c_1, c_2 von $\vec{x}_0$ abhängige Konstanten bezeichnen (vgl. Aufgabe 1). Sind beide Eigenwerte reell, so gilt

$$\lim_{t\to\infty} \left(c_i e^{\lambda_i t}\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \lambda_i > 0 \text{ und } c_1 > 0, \\ -\infty, & \text{falls } \lambda_i > 0 \text{ und } c_1 < 0, \\ 0, & \text{falls } \lambda_i < 0 \text{ oder } c_i = 0, \\ c_i, & \text{falls } \lambda_i = 0, \end{cases}$$

für $i = 1, 2$. Sind also $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, so ist der Ursprung der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems und jede nichttriviale Lösung strebt für $t \to +\infty$ entweder gegen den Ursprung oder unendlich weit von diesem weg.

   a) Hier sind $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Jede nichttriviale Lösung „explodiert“ also sowohl in Richtung von $\pm\vec{v}_1$ als auch in Richtung von $\pm\vec{v}_2$ und strebt demnach für $t \to +\infty$ ins Unendliche. Der Ursprung ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

   b) Hier sind $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Jede nichttriviale Lösung strebt also zum Ursprung hin. Dieser ist somit ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

   c) Hier ist $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$. Eine nichttriviale Lösung, die auf der durch $\vec{v}_1$ bestimmten Geraden verläuft, strebt also gegen den Ursprung. Jede andere nichttriviale Lösung nähert sich asymptotisch der durch $\vec{v}_2$ bestimmten Geraden.

   Nichtreelle Eigenwerte treten stets in Paaren λ, $\bar{\lambda}$ von komplex-konjugierten Zahlen auf. Ist $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$ ein Eigenvektor zu $\lambda = \gamma + i\omega$, so hat (5) die Lösung

$$\vec{x}(t) = e^{\gamma t}\left(\left(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\right)\vec{u} + \left(-c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\right)\vec{v}\right),$$

   mit von $\vec{x}_0$ abhängigen Konstanten c_1, c_2 (vgl. Aufgabe 1). Der Imaginärteil der Eigenwerte führt also dazu, dass jede nichttriviale Lösung eine Spirale um den Ursprung beschreibt[1].

[1] Die Spiralbewegung verläuft für $\omega > 0$ im Uhr- oder Gegenuhrzeigersinn abhängig von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Sind $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, so ist der Ursprung der einzige Gleichgewichtspunkt des Systems und jede nichttriviale Lösung strebt für $t \to +\infty$ wegen

$$\lim_{t\to\infty} \left|e^{\gamma t + i\omega t}\right| = \lim_{t\to\infty} e^{\gamma t} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \gamma < 0, \\ \infty, & \text{falls } \gamma > 0, \\ 1, & \text{falls } \gamma = 0 \end{cases}$$

entweder gegen den Ursprung oder unendlich weit von diesem weg, sofern sie nicht, im Fall $\gamma = 0$, periodisch mit der (minimalen) Periode $2\pi/|\omega|$ ist.

d) Hier ist $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 > 0$, die nichttrivialen Lösungen „explodieren“ also wiederum in alle Richtungen. Die Bewegung beschreibt einen instabilen Strudel.

e) Hier ist $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 < 0$, die nichttrivialen Lösungen streben also für $t \to +\infty$ gegen den Ursprung. Die Bewegung beschreibt einen instabilen Strudel.

Remark: Ob die Rotationsbewegung des instabilen Strudels im positiven oder im negativen Drehsinn verläuft, kann mit Hilfe der Eigenvektoren bestimmt werden. (Dies wird hier aber nicht behandelt.)

4. a) Die Eigenwerte sind gegeben durch $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (1, -1)^T$ und $v_2 = (0, 1)^T$. Damit ist das gesuchte Bild I.

   b) Hier sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i$. Da der Realteil negativ ist, sind die Bahnen spiralförmig einwärts verlaufend. Bislang kommen also Bild IV und Bild VI in Frage. Weiters beachten wir, dass für $\vec{x}(0) = (1, 0)^T$ gilt:

$$\frac{d\vec{x}(0)}{dt} = \begin{pmatrix} -1.5 & -1 \\ 2 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Im Punkt $\vec{x}(0) = (1, 0)^T$ ist die Steigung der Bahnkurve also $(-1.5, 2)^T$, zeigt also nach Nord-West. Das passende Bild ist deshalb Bild IV.

   c) Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v_1 = (0, 1)^T$ und $v_2 = (1, -1)^T$. Dies entspricht Bild V.

5. Die Eigenschaften von A entsprechen:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda_1 = -1 \text{ und}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda_2 = 1\ .$$

   Es folgt, dass $A^N v_1 = (-1)^N v_1$ und $A^N v_2 = v_2$.

a) Da der gegebene Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v_2 - v_1$ ist, gilt

$$A^{99}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{99}(v_2 - v_1) = A^{99}v_2 - A^{99}v_1 = \lambda_2^{99}v_2 - \lambda_1^{99}v_1 = v_2 + v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

b) Die gegebenen Gleichungen zusammen besagen

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

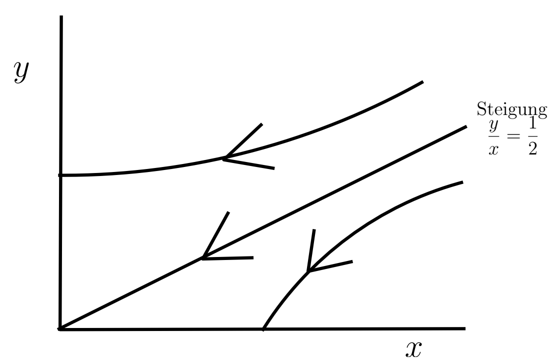
wobei S eine invertierbare Matrix ist (mit $\det S = 1$). Es folgt, dass

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{S^{-1}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} .$$

6. Sei $x(t)$ die Populationsanzahl (zur Zeit t) des Bestandes X und $y(t)$ die Populationsanzahl des Bestandes Y.

a) Die Tierart Y ist am bösartigsten, da die Vernichtungsrate des Bestandes X durch Y viermal grösser als die Vernichtungsrate des Bestandes Y durch X ist ($4y$ vs. x).

b) Die Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 2$, mit entsprechenden Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wir skizzieren den relevanten Teil ($x, y \geq 0$) des Phasenporträts dieses Systems:



Ein Bestand gewinnt, wenn die Anzahl des anderen Null wird, d.h., wenn die Bahnkurve eine Achse trifft. Deshalb gewinnt Bestand Y, falls $\frac{y(0)}{x(0)} > \frac{1}{2}$, d.h., falls am Anfang die Anzahl $y(0)$ grösser als die Hälfte von $x(0)$ ist. Bestand X gewinnt falls $\frac{y(0)}{x(0)} < \frac{1}{2}$.