Dr. Ana Cannas

# Musterlösung 2

1. a) Der Wert von $f$ in $-1$ ist gegeben durch $0$. Da $f$ für $-1 \leq x < 0$ durch $x^2 - 1$ gegeben ist, existiert auch der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle $-1$ und ist gegeben durch $f(-1)$. Die Stetigkeit an der Stelle $-1$ folgt aus der Stetigkeit der Funktion $x^2 - 1$.

   b) Der Wert von $f$ in $1$ ist gegeben durch $1$. Da sowohl der rechtsseitige Grenzwert von $f$ in $1$ als auch der linksseitige Grenzwert von $f$ in $1$ existiert und diese übereinstimmen, existiert $\lim_{x\to 1} f(x)$ und ist gegeben durch $2$, also ungleich $f(1)$. Deshalb ist $f$ auch nicht stetig in $1$.

   c) $f$ ist in $2$ nicht definiert und deshalb auch nicht stetig.

   d) Da Polynomfunktionen, sowie auch konstante Funktionen, stetig sind, ist $f$ in den Abschnitten $[-1, 0)$, $(0, 1)$,$(1, 2)$ und $(2, 3)$ stetig.

   e) Aus der Grafik ist leicht ersichtlich, dass man $f(2) = 0$ wählen muss.

   f) Da $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ müsste man $f(1) = 2$ setzen.

2. a) Der Grenzwert $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ existiert nicht, da $\frac{1}{x}$ für $x \to 0$ nach $\infty$ geht.

   b) Der Grenzwert $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ existiert und ist $0$, wie man leicht aus der Definition von $f$ sehen kann.

   c) Da der rechtsseitige Grenzwert nicht existiert, existiert auch $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht.

   d) Da sowohl die konstante Funktion $0$ als auch $\sin(\frac{1}{x})$ stetig sind, ist $f$ ausser in $0$ überall stetig.

3. a) Wir erhalten $f'(x) = -8 + 4x + 3x^2$.

   b) Ausmultiplizieren von $f$ ergibt $5 - 8x + 2x^2 + x^3$ und natürlich wieder $f'(x) = -8 + 4x + 3x^2$.

   c) Wir leiten $f'$ noch einmal nach $x$ ab und erhalten $f''(x) = 4 + 6x$. Die dritte Ableitung ist dann $f'''(x) = 6$ und die vierte Ableitung ergibt $0$.

   d) Mit der Quotientenregel erhalten wir $g'(t) = \frac{1}{(1+\sqrt{t})^2\sqrt{t})}$. Wir setzen $1$ ein und erhalten $g'(1) = \frac{1}{4}$.

   e) Mit der Quotientenregel und nach Vereinfachung erhalten wir $h'(t) = -4 - \frac{1}{t^2}$ und $h'(1) = -5$.

   f) $(gh)'(1) = -\frac{1}{2}$.

**Bitte wenden!**

4. a) Wir machen heute eine Investition von 100 CHF, also $y_0 = 100$, die Jahresrate beträgt $5$ Prozent. Dies wird durch

$$y(t) = 100e^{\frac{5}{100}t}$$

modelliert. Nach $4$ Jahren erwarten wir also $y(4) = 122,15$ CHF, wobei wir auf 5 Rappen genau gerundet haben.

b) Wir überprüfen $\lambda \approx \frac{0.693}{\tau}$ für die Halbwertszeit $\tau$. Wir haben also $\mathcal{N}(\tau) = \frac{1}{2}\mathcal{N}_0$ und $\mathcal{N}(\tau) = \mathcal{N}_0 e^{-\lambda\tau}$. Wir setzen die beiden Ausdrücke für $\mathcal{N}(\tau)$ gleich und erhalten $\frac{1}{2}\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0 e^{-\lambda\tau}$. Kürzen von $\mathcal{N}_0$ ergibt $\frac{1}{2} = e^{-\lambda\tau}$. Nun können wir den Logarithmus auf beide Seiten anwenden und erhalten $ln(\frac{1}{2}) = -\lambda\tau$. Mit $ln(\frac{1}{2}) = -ln(2)$ müssen wir also noch $\lambda = \frac{ln(2)}{\tau}$ betrachten. Mit dem Taschenrechner gibt das tatsächlich $\lambda \approx \frac{0.693}{\tau}$.

Es bleibt noch eine Prognose nach 866 Jahren zu stellen, wobei $\lambda = 1.2 \times 10^{-4}$ gewählt wird.

$$\mathcal{N}(t = 866) = \mathcal{N}_0 e^{-1.2\times10^{-4}866} = 0.901\mathcal{N}_0$$

Nach 866 Jahren sind also noch etwa $90,1$ Prozent der Anfangssubstanz vorhanden.

c) Wir haben $y(t) = y_0 e^{\frac{r}{100}t}$. Dann ist

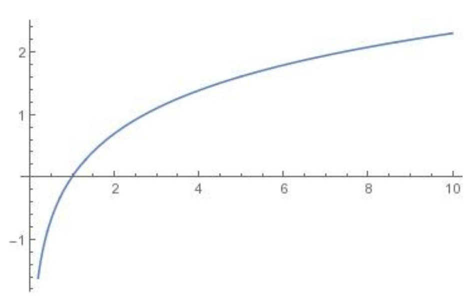
$$y'(t) = y_0 e^{\frac{r}{100}t}\frac{r}{100} = \frac{r}{100}y(t).$$

Wir haben $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}_0 e^{-\lambda t}$, also

$$\mathcal{N}'(t) = \mathcal{N}_0 e^{-\lambda t}(-\lambda) = -\lambda\mathcal{N}(t).$$

5. a) Wir wissen, dass $e^0 = 1$ und deshalb gilt $\ln(1) = 0$. Da $\ln$ die Inverse von $e$ ist, gilt $\ln(e^\pi) = \pi$.

b) Der Graph von $\ln(x)$:




**Siehe nächstes Blatt!**

c) Wir wissen $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Wegen $(e^x)' = e^x$ folgt also

$$(\ln)'(y) = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

d) Mit der Produktregel bekommen wir:

$$(x \ln(x) - x)' = \ln(x) + x\frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

e) Wir haben $e^{3x} = y \Leftrightarrow \ln(y) = 3x \Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{3} = x$, also ist die Umkehrfunktion von $e^{3x}$ gegeben durch $\frac{\ln(y)}{3}$.

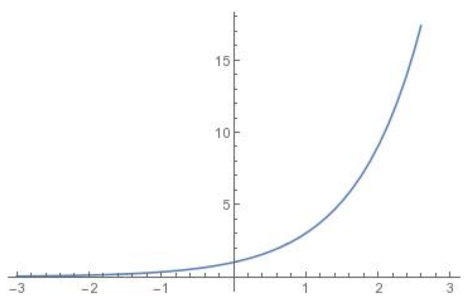
f) $(\frac{\ln(y)}{3})' = \frac{1}{3y}$ und im Punkt $e^3$ also $\frac{1}{3e^3}$.

6. a) Wir haben $a^x = e^{kx}$, also $\ln(a^x) = \ln(e^{kx}) = kx$ und wegen $\ln(a^x) = x\ln(a)$ folgt, dass wir $k = \ln(a)$ wählen müssen.

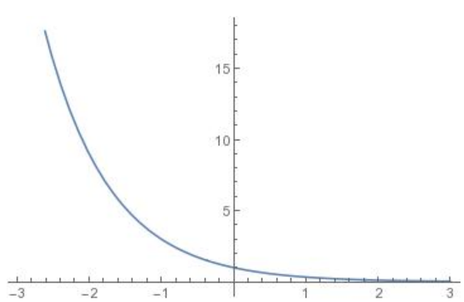
b) $a^x = e^{\ln(a)x}$. Nach $x$ abgeleitet ergibt das $(e^{\ln(a)x})' = \ln(a)e^{\ln(a)x}$, also $\ln(a)a^x$.

c) $a^x = e^{\ln(a)x}$ und für $a > 1$ ist $\ln(a) > 0$ und diese Exonentialfunktion streng monoton wachsend. Für $0 < a < 1$ ist $\ln(a) < 0$ und $e^{\ln(a)x}$ deshalb streng monoton fallend.

d) Für $a > 1$ erhalten wir




und für $0 < a < 1$ erhalten wir




**Bitte wenden!**

e) $a^X = e^{\ln(a)X}$. Nach $a$ abgeleitet ergibt das $(e^{\ln(a)X})' = Xe^{\ln(a)X}\frac{1}{a}$, da wir jetzt auch die innere Ableitung berücksichtigen müssen. Also erhalten wir $Xa^X\frac{1}{a} = Xa^{X-1}$.

7. a) Wir verwenden die Regel $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ für $f(x) = a^x$ und erhalten

$$(\log_a y)' = \frac{1}{a^{\log_a y}\ln(a)} = \frac{1}{y\ln(a)}.$$

b)

$$\log_{10} 1000 = x \Leftrightarrow 1000 = 10^x \Rightarrow x = 3$$
$$\log_{100} 10 = x \Leftrightarrow 10 = 100^x \Rightarrow x = 0.5$$
$$\log_2 64 = x \Leftrightarrow 64 = 2^x \Rightarrow x = 6$$
$$\log_{0.5} 2 = x \Leftrightarrow 2 = 0.5^x \Rightarrow x = -1$$

c) i. Wir haben $\log_a y = x$ und $\log_a y_0 = x_0$, also $a^x = y$ und $a^{x_0} = y_0$. Somit gilt $yy_0 = a^{x+x_0}$ was zu $\log_a(yy_0) = x + x_0 = \log_a y + \log_a y_0$ führt.

ii. Sei $\log_a y = x$, also $y = a^x$. Dann gilt $y^{-1} = a^{-x}$. Logarithmieren auf beiden Seiten liefert $\log_a(y^{-1}) = \log_a(a^{-x}) = -x = -\log_a y$.

iii. Wieder $\log_a y = x$, also $y = a^x$. Also $y^k = a^{xk}$. Logarithmieren gibt $\log_a y^k = \log_a a^{xk} = xk = k\log_a y$.

d)

$$\begin{aligned}
2\log_a(3x) + \log_a(2x) - \frac{1}{2}\log_a(9x^2) &= \log_a(9x^2) + \log_a(2x) - \frac{1}{2}\log_a(9x^2) \\
&= \log_a(2x) + \frac{1}{2}\log_a(9x^2) \\
&= \log_a(2x) + \log_a(3x) \\
&= \log_a(6x^2)
\end{aligned}$$

e) Wir haben

$$e^{(\ln 0.2)t} = (e^{(\ln 0.2)})^t = 0.2^t$$

und weil $0.2^2 = 0.04$ folgt $t = 2$.

f) Es gilt $(2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12}$ und $2^{(2^3)} = 2^{81}$. Also $(2^3)^4 < 2^{(2^3)}$.

g) $y = 0.1x^{\frac{2}{3}}$ genau dann wenn $Y = \log_{10} y = \log_{10}(0.1x^{\frac{2}{3}})$. Vereinfachen führt zu $Y = \log_{10}(0.1) + \log_{10}(x^{\frac{2}{3}}) = -1 + \frac{2}{3}\log_{10} x$. Also erhalten wir $Y = -1 + \frac{2}{3}X$.