Musterlösung 9

1. a) Man berechnet mit dem Gaussalgorithmus

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{(II)-2(I)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{(I)+2(II)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Also muss $(x, y) = (-1, 1)$ und somit schneiden sich die beiden Geraden in genau einem Punkt.

b)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{array}\right) \overset{(II)-\frac{3}{2}(I)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{array}\right).$$

Die untere Zeile gibt dann $0 = -\frac{5}{2}$ also gibt es keine Lösung und somit schneiden sich die Geraden nicht, das heisst es handelt sich um zwei parallele Geraden, die echt verschieden sind.

c)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{array}\right) \overset{(II)-\frac{3}{2}(I);(I)\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir setzen $y =: t \in \mathbb{R}$ und erhalten $x = 1 - 2t$, also $(x, y) = (1 - 2t, t),\ t \in \mathbb{R}$. Es handelt sich also um eine Schnittgerade, das heisst die beiden ursprünglichen Gleichungen definieren dieselbe Gerade.

2. a) Das System lässt sich reduzieren auf

$$\begin{aligned} x + 5z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

das heisst, es gibt keine Lösung; es gibt keinen Punkt, der in allen drei Ebenen liegt.

b) Das System lässt sich reduzieren auf

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0, \end{aligned}$$

das heisst, die Lösung ist der Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Die drei Ebenen schneiden sich im Ursprung.

Bitte wenden!

c) Das System lässt sich reduzieren auf

$$\begin{aligned} x + 5z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

das heisst die Lösungsmenge besteht aus allen Punkten von der Form

$$(x, y, z) = (-5t, t, t)\,,$$

wobei t beliebig. Die drei Ebenen schneiden sich also in einer Gerade.

3. Das System lässt sich reduzieren auf

$$\begin{aligned} x - 3z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ \left(k^2 - 4\right) z &= k - 2. \end{aligned}$$

a) Das System hat eine eindeutige Lösung falls $k^2 - 4 \neq 0$, das heisst falls $k \neq \pm 2$.

b) Falls $k = 2$ ist die letzte Gleichung $0 = 0$. Das heisst es gibt unendlich viele Lösungen.

c) Falls $k = -2$ ist die letzte Gleichung $0 = 4$. Das heisst es gibt keine Lösung.

4. a) Sei v die Geschwindigkeit des Schiffes relativ zum Wasser und s die Geschwindigkeit des Wasserstroms. Dann beträgt die Geschwindigkeit des Schiffes relativ zum Land $v + s$ flussabwärts und $v - s$ flussaufwärts. Verwenden Sie nun die Tatsache, dass (Strecke) = (Geschwindigkeit)(Zeit) um folgende Gleichungen zu erhalten

$$\begin{aligned} 8 &= (v + s)\,\frac{1}{3} &&\leftarrow \text{flussabwärts} \\ 8 &= (v - s)\,\frac{2}{3} &&\leftarrow \text{flussaufwärts} \end{aligned}$$

Die Lösung ist $v = 18$ und $s = 6$.

b) Im thermischen Gleichgewicht muss gelten, dass

$$T_1 = \frac{T_2 + 200 + 0 + 0}{4},\; T_2 = \frac{T_1 + T_3 + 200 + 0}{4} \text{ und } T_3 = \frac{T_2 + 400 + 0 + 0}{4}.$$

Das kann man auch als folgendes System schreiben

$$\begin{aligned} -4T_1 + T_2 &= -200 \\ T_1 - 4T_2 + T_3 &= -200 \\ T_2 - 4T_3 &= -400. \end{aligned}$$

Das ergibt die Lösung $(T_1, T_2, T_3) = (75, 100, 125)$.

Siehe nächstes Blatt!

5. a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \overset{(II)-2(I)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & -8 \end{array}\right) \overset{(I)-(II)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 \\ 0 & 1 & 8 & -8 \end{array}\right).$$

Wir setzten $z =: t \in \mathbb{R}$ und erhalten somit $y + 8t = -8,\ x - 10t = 13$ also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t + 13 \\ -8t - 8 \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{(III)-(II)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{(I)-2(III);(II)-3(III)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{(I)-9(IV);(II)-11(IV);(III)+3(IV)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

und mit $x_2 =: t \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Nach x auflösen liefert $x = 4 - 2y - 3z$, somit sind 2 Variablen frei wählbar. Wir setzen $y =: s \in \mathbb{R}$ und $z =: t \in \mathbb{R}$ und somit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

d) Summe der beiden Gleichungen liefert $0 = 4$ was nicht lösbar ist. Somit ist die Lösungsmenge dieses Gleichungssystemes leer.

e) Das System lässt sich reduzieren auf

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und somit ist

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_3 \\ x_2 &= 4 + 3x_3 \\ x_4 &= -2. \end{aligned}$$

Wir setzen $x_3 =: t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 3t + 4 \\ t \\ -2 \end{pmatrix}.$$

6. a) Gesucht sind Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$, so dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = x + 3y - z = 0.$$

Die Lösungsmenge ist die Ebene bestehend aus den Punkten von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3r + t \\ r \\ t \end{pmatrix},$$

wobei r und t beliebige reelle Zahlen sind.

b) Gesucht ist die Lösung des folgenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 7x_4 &= 0, \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

das sich reduzieren lässt auf

$$\begin{aligned} x_1 + 0.25x_4 &= 0 \\ x_2 - 1.5x_4 &= 0 \\ x_3 + 2.25x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Lösung besteht aus Punkten von der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25t \\ 1.5t \\ -2.25t \\ t \end{pmatrix}$, wobei t eine beliebige reelle Zahl.

7. a) Zwei Vektoren stehen senkrecht zueinander genau dann, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist, also muss

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0.$$

Dann ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = 1 + 2 + 3\lambda$$

also muss $3\lambda = -3$ und somit $\lambda = -1$.

b) Aus

$$\begin{aligned} 2 = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ 1 - \lambda \\ 2 - \lambda \end{pmatrix} \right|^2 &= (\lambda - 1)^2 + (1 - \lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 \\ &= 2\,(\lambda - 1)^2 + (\lambda - 2)^2 = 3\lambda^2 - 8\lambda + 6 \end{aligned}$$

folgt $3\lambda^2 - 8\lambda + 4$, also $\lambda = 2$ oder $\lambda = \frac{2}{3}$.

c) Für den Zwischenwinkel $\varphi = \frac{\pi}{6}$ gilt

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{2}\,\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} &= \cos\varphi \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{matrix} \right| \cdot \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{matrix} \right| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{2 + \lambda^2} = \frac{3}{2}\,\sqrt{2 + \lambda^2}, \end{aligned}$$

also $\lambda^2 - 8\,\sqrt{2}\,\lambda + 14 = 0$ und damit $\lambda = \sqrt{2}$ oder $\lambda = 7\,\sqrt{2}$.

Bitte wenden!

d) Mit dem Gaussverfahren folgt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 4 & -1 & -2 & -\lambda \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & -\lambda \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -\lambda \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{array}\right),$$

also muss $\lambda = 3$ sein.

Die Schnittgerade wird dann z.B. durch

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu \in \mathbb{R},$$

parametrisiert.