D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 15
Dr. Ana Cannas

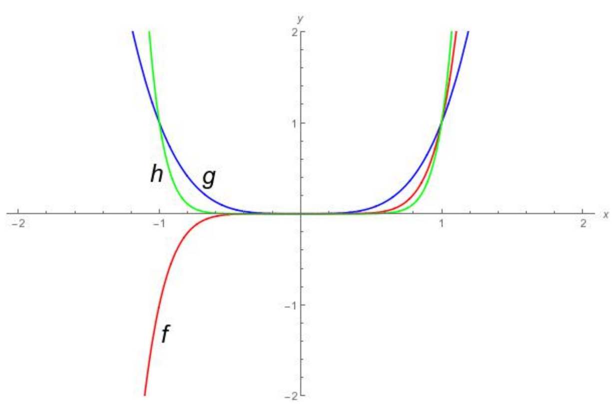
Serie 1: Repetition von elementaren Funktionen

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 1 bilden den Fokus der Übungsgruppen in der zweiten Semesterwoche (21./23.9).

1. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich jeder Funktion. Entscheiden Sie, ob die Funktion gerade, ungerade oder keines von beiden ist.

   a) $f(x) = 5 - 2x$
   b) $f(t) = \frac{1}{t-1}$
   c) $g(x) = \sqrt{|x|}$
   d) $G(u) = \frac{u}{|u|}$
   e) $H(w) = \sqrt{5w + 10}$

2. Ordnen Sie die Funktionen x^4, x^7 und x^{10} den Graphen aus der nachfolgenden Abbildung zu. Verwenden Sie kein grafisches Hilfsmittel und begründen Sie Ihre Antwort.



3. Die Funktionen $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$ und $j(x) = 2x$ seien gegeben. Drücken Sie jede der unten angegebenen Funktionen durch eine Verkettung von einer oder mehreren der Funktionen f, g, h und j aus.

   a) $y = \sqrt{x} - 3$

b) $y = 2\sqrt{x}$

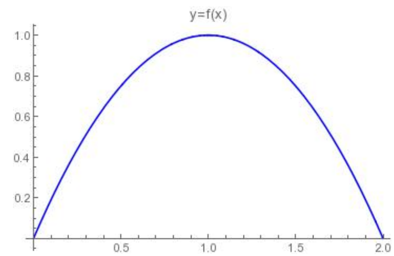
c) $y = x^{\frac{1}{4}}$

d) $y = 4x$

e) $y = \sqrt{(x-3)^3}$

f) $y = (2x-6)^3$

4. Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit dem Definitionsbereich $[0, 2]$ und dem Wertebereich $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Definitionsbereiche und Wertebereiche der folgenden Funktionen und skizzieren Sie ihre Graphen.



a) $f(x) + 2$

b) $f(x) - 1$

c) $2f(x)$

d) $-f(x)$

e) $f(x+2)$

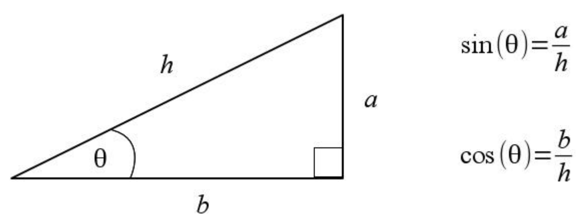
f) $f(x-1)$

g) $f(-x)$

h) $-f(x+1) + 1$

5. Der **Sinus** eines Winkels θ in einem rechtwinkligen Dreieck ist der Quotient der Länge derjenigen Seite, die dem Winkel gegenüber liegt, und der Hypotenuse. [1]

   Der **Cosinus** ist der Quotient der Länge der anliegenden Seite und der Hypotenuse.



[1] Die *Sinusfunktion* kann bis zur Indischen Astronomie im 5ten Jahrhundert zurückverfolgt werden und die Bezeichnung in Sanskrit für sie hat natürlich mit *Bogensehne* zu tun. Das Wort *Sinus* entstand aus einer Lateinischen Fehlübersetzung des Wortes, das im Arabischen verwendet wurde und eine Transkription des Sanskrit Wortes war.

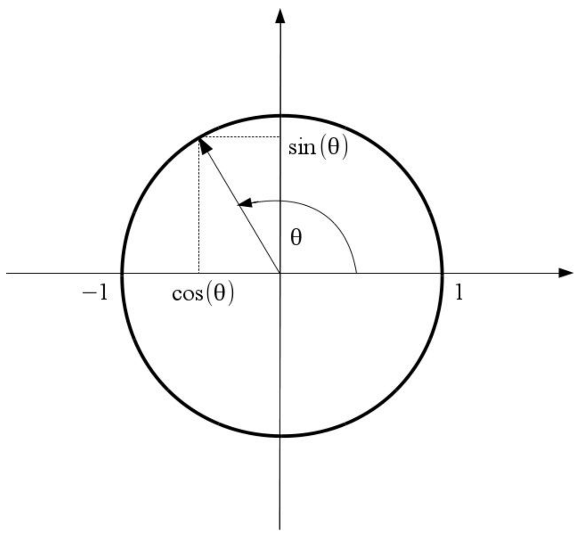
Die **Tangens-** und **Kotangens**funktionen sind definiert als

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{und} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

bei denjenigen Winkeln θ, wo die respektiven Nenner nicht verschwinden.

Das Ziel dieser Aufgabe ist die elementaren Werte von $\sin$ und $\cos$ zu verstehen, wobei nur Folgendes verwendet wird:

- ihre geometrische Definition von oben,
- der Satz von Pythagoras
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
und
- die Ergänzung von $\cos\theta$ und $\sin\theta$ zu beliebigen reellen Werten von θ mittels Betrachtung von Winkeln im Einheitskreis.

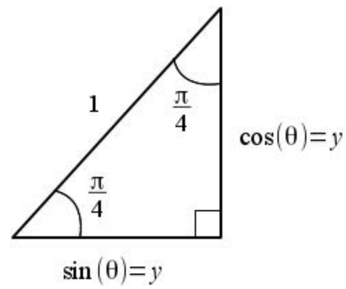


Schliesslich können $\cos\theta$ und $\sin\theta$ Werte in $[-1, 1]$ annehmen und ihre Vorzeichen geben an, in welchem Quadranten sich der Winkel befindet.

Betrachten Sie folgende Tabelle

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	(∞)

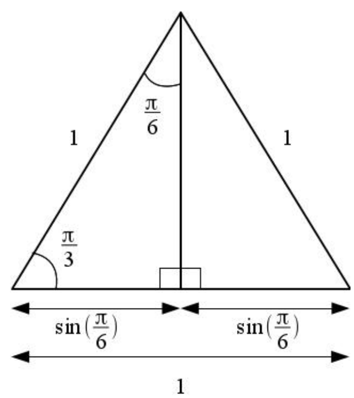
a) Überprüfen Sie die Tabellenwerte für $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ anhand eines gleichschenkligen Dreiecks.



Hinweis: Pythagoras besagt nun, dass

$$y^2 + y^2 = 1.$$

b) Überprüfen Sie die Tabellenwerte für $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ anhand (einer Hälfte) eines gleichseitigen Dreiecks und abermals Verwendung von Pythagoras.



c) Überprüfen Sie die übrigen Tabellenwerte. Bei genauerer Betrachtung des obigen Dreiecks sieht man, dass

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} \quad \text{und vice-versa.}$$

d) In den folgenden Teilaufgaben ist einer der Werte $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$ gegeben. Bestimmen Sie die beiden anderen, wenn x im gegebenen Intervall liegt.

i. $\sin(x) = \frac{3}{5}$, $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

ii. $\cos(x) = \frac{1}{3}$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$.

iii. $\tan(x) = \frac{1}{2}$, $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

Hinweis: Pythagoras

6. Exponentialfunktionen gehören zu den wichtigsten Funktionen in der Mathematik und treten in einer Vielzahl von Anwendungen auf, inklusive Zinsraten, radioaktiver Zerfall, Bevölkerungswachstum, die Verbreitung einer Krankheit, Verbrauch natürlicher Ressourcen, Druck der Erdatmosphäre, Temperaturwechsel eines geheizten Objekts in einer kühleren Umgebung und Altersbestimmung von Fossilien.

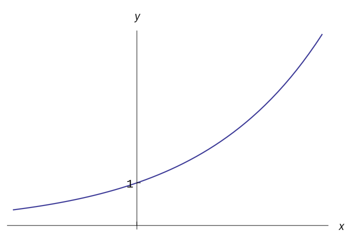
   Die wichtigste Exponentialfunktion, die für Modellierung von natürlichen, physikalischen und ökonomischen Phänomenen gebraucht wird, ist die **natürliche Exponentialfunktion**

   $$e^x,$$

   welche als Basis die Eulerzahl hat,

   $$e = 2.71828182\cdots$$

   Hier ist ein Sketch des Graphen von e^x

   Die Funktion e^x ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, nimmt alle strikt positiven Werte an und ist streng monoton wachsend.

   Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

   a) $1 + e^x$.
   b) $-e^x$.
   c) e^{-x}.
   d) $e^x + e^{-x}$.
   e) $-e^{-x}$.
   f) e^{3x}.
   g) $\frac{1}{2}e^x$.
   h) e^{x-2}.

   Hinweis: Es ist anschaulicher, wenn Sie in jeder Skizze den Graphen von e^x mit einer anderen Farbe hervorheben.

7. Der **Kosinus Hyperbolicus** und **Sinus Hyperbolicus** sind die Funktionen definiert durch
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
Diese sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, da es sich bei beiden um *Linearkombinationen*[2] von e^x und e^{-x} handelt.

   a) Können $\cosh x$ oder $\sinh x$ negative Werte annehmen?
   Was ist der Wertebereich von $\cosh x$ und von $\sinh x$?

   b) Skizzieren Sie die Graphen von $\cosh x$ und von $\sinh x$.

   c) Welche der beiden ist eine gerade Funktion und welche ist eine ungerade Funktion?

   d) Was sind die auffälligsten Unterschiede zwischen den hyperbolischen Funktionen $\cosh x,\ \sinh x$ und den trigonometrischen Funktionen $\cos x,\ \sin x$? Hinweis: Betrachten Sie die Graphen.

   e) Berechnen Sie
   $$\cosh^2 x - \sinh^2 x$$
   mit Hilfe der Rechenregeln für Potenzen (insbesondere, $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$).
   Das Resultat ist bekannt als der *hyperbolische Satz von Pythagoras* und ist eine Begründung für die Namensgebung dieser Funktionen.

   f) Überprüfen Sie, dass
   $$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh(2x).$$

   g) Überprüfen Sie, dass
   $$2\cosh^2 x = 1 + \cosh(2x).$$
   Gilt $2\sinh^2 x = 1 + \sinh(2x)$ ebenfalls?

Die Lösungen sind:

1. a) D = W = $(-\infty, \infty)$, weder gerade noch ungerade
   b) D = $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, W = $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, weder gerade noch ungerade
   c) D = $(-\infty, \infty)$, W = $[0, \infty)$, gerade
   d) D = $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, W = $\{-1, +1\}$, ungerade

[2]Eine Linearkombination von Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist eine Funktion von der Form $af(x)+bg(x)$, wobei a und b gegebene reelle Konstanten sind.

e) D = $[-2,\infty)$, W = $[0,\infty)$, weder gerade noch ungerade

2. $g(x) = x^4$, $f(x) = x^7$, $h(x) = x^{10}$

3. a) $f(g(x))$
   b) $j(g(x))$
   c) $g(g(x))$
   d) $j(j(x))$
   e) $g(h(f(x)))$
   f) $h(j(f(x)))$

4. a) $f(x) + 2$: Definitionsbereich: $[0, 2]$, Wertebereich: $[2, 3]$.
   b) $f(x) - 1$: Definitionsbereich: $[0, 2]$, Wertebereich: $[-1, 0]$.
   c) $2f(x)$: Definitionsbereich: $[0, 2]$, Wertebereich: $[0, 2]$.
   d) $-f(x)$: Definitionsbereich: $[0, 2]$, Wertebereich: $[-1, 0]$.
   e) $f(x + 2)$: Definitionsbereich: $[-2, 0]$, Wertebereich: $[0, 1]$.
   f) $f(x - 1)$: Definitionsbereich: $[1, 3]$, Wertebereich: $[0, 1]$.
   g) $f(-x)$: Definitionsbereich: $[-2, 0]$, Wertebereich: $[0, 1]$.
   h) $-f(x + 1) + 1$: Definitionsbereich: $[-1, 1]$, Wertebereich: $[0, 1]$.

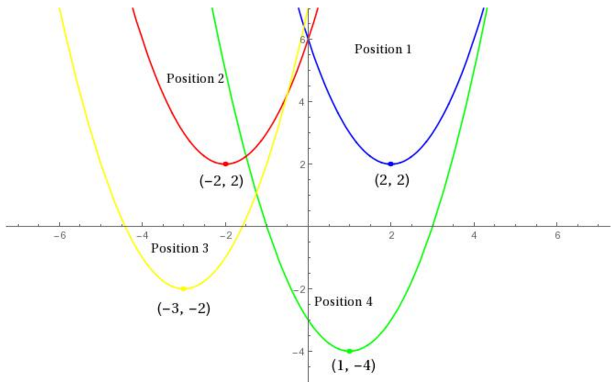
5. d i. $\cos(x) = -\frac{4}{5}$, $\tan(x) = -\frac{3}{4}$.
   ii. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{8}}{3}$, $\tan(x) = -\sqrt{8}$.
   iii. $\sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos(x) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

7) a) Wertebereich fuer $\cosh(x)$: $[1,\infty)$, Wertebereich fuer $\sinh(x)$: $[-\infty,\infty)$
   c) $\cosh$ ist gerade und $\sinh$ ungerade
   d) $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind periodisch, $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ sind nicht periodisch.
   e) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$

MC-Serie 1

1. Ordnen Sie die Funktionsgleichungen aus den Teilen A bis D den Graphen aus der nachfolgenden Abbildung zu.

   A: $y = (x-1)^2 - 4$
   B: $y = (x-2)^2 + 2$
   C: $y = (x+2)^2 + 2$
   D: $y = (x+3)^2 - 2$



   a) A3, B1, C2, D4
   b) A3, B2, C1, D4
   c) A4, B1, C2, D3
   d) A4, B2, C1, D4

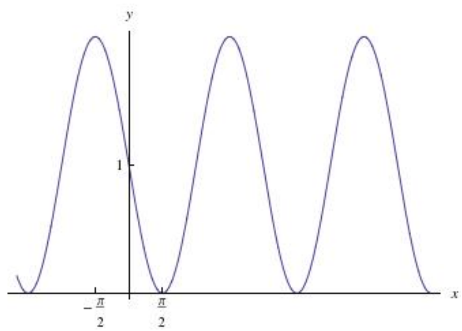
2. Betrachten Sie einen Punkt (x, y), der auf dem Graphen der Geraden $2x + 4y = 5$ liegt. Sei L der Abstand des Punktes (x, y) zum Ursprung $(0, 0)$. Schreiben Sie L als eine Funktion von x.

   a) $L(x) = x$
   b) $L(x) = \frac{1}{4}(5 - 2x)$
   c) $L(x) = \sqrt{x^2 + \frac{5}{4}}$
   d) $L(x) = \frac{1}{4}\sqrt{20x^2 - 20x + 25}$

3. Wie lang ist ein Kreisbogen eines Kreises vom Radius 9 m, der von einem 120 Grad Winkel eingeschlossen wird?

a) 6π m
b) 18π m
c) 540 m
d) 1080 m

4. Welche Funktion besitzt den folgenden Graphen?



a) $f(x) = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$
b) $f(x) = 1 + \sin(x - \pi).$
c) $f(x) = -1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$
d) $f(x) = -1 + \sin(x - \pi).$

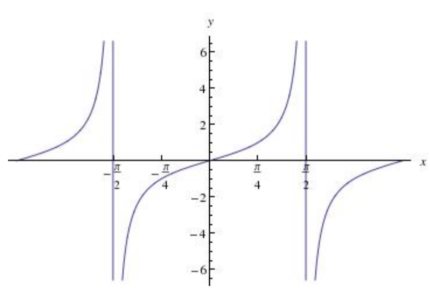
5. Welche Funktion ist gleich

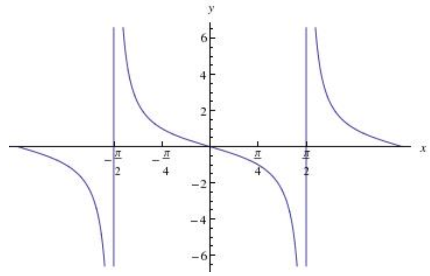
$$f(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)?$$

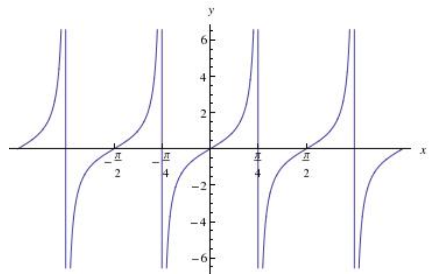
a) $\cos(-x)$
b) $-\cos(x)$
c) $\cos(x + \frac{\pi}{2})$
d) $\cos(x - \frac{\pi}{2})$

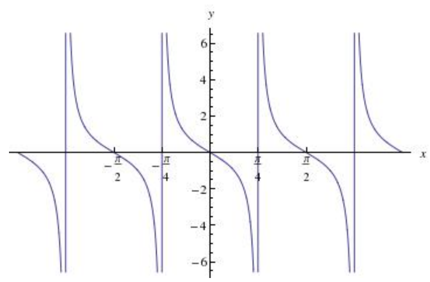
6. Welcher ist der Graph der Funktion

$$f(x) = \tan(-2x)?$$

a) 

b) 

c) 

d) 

7. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = (x+2)\frac{|x-1|}{x-1}$$

ist **falsch**?

a) $\lim_{x\to 0} f(x) = -2.$

b) $\lim_{x\to 1+} f(x) = 3.$

c) $\lim_{x\to 1-} f(x) = -3.$

d) $\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$

8. Für welchen Wert von a ist

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

an jeder Stelle x stetig?

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{4}{3}$
d) 3

9. Welche der folgenden stückweise definierten Funktionen ist **nicht** stetig?

a) $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 1 \\ e - x + 1, & x \leq 1. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x > 0 \\ 3x, & x \leq 0. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x < 3. \end{cases}$

10. Welche Aussage über Grenzwerte der Funktion

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

ist **falsch**?

a) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$
b) $\lim_{x \to 4} f(x) = +\infty$
c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Mehr **Informationen** zur Vorlesung und den Übungen finden Sie unter

http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2015/other/mathematik1_UMNW

Die **Übungsgruppen** finden jeweils statt am

- Montag von 15-17 Uhr für den Studiengang Umweltnaturwissenschaften BSc

- Mittwoch von 10-12 Uhr für den Studiengang Erdwissenschaften BSc
- Mittwoch von 13-15 Uhr für den Studiengang Agrarwissenschaften BSc sowie den Studiengang Lebensmittelwissenschaft BSc

Bitte tragen Sie sich so bald wie möglich in eine der Übungsgruppen ein.

Die **Präsenz** findet ab Mittwoch 23.9.2015 jeweils am Montag 12-14, Dienstag 17-19 und Mittwoch 17-19 im Raum HG E 41 statt.