Serie 13: Systeme linearer DGL 1. Ordnung

Bemerkung: Die Aufgaben dieser Serie bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 14. und 16. Dezember.

1. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

   a) $\begin{aligned} \dot{x} &= x + 12y, & x(0) &= 0, \\ \dot{y} &= 3x + y, & y(0) &= 1. \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \dot{x} &= y & x(0) &= 1, \\ \dot{y} &= -x & y(0) &= 3. \end{aligned}$

   c) $\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - 4y, & x(0) &= 4, \\ \dot{y} &= x - y, & y(0) &= 1. \end{aligned}$

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= 2\,y_1 - 2\,y_3, \\ y_2' &= -y_2, \\ y_3' &= y_1 - y_3. \end{aligned}$$

3. Unten sind einige Matrizen A, deren Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren angegeben sind. Beschreiben Sie jeweils in Worten, wie sich die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungssysteme $\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$ für $t \to +\infty$ verhalten.

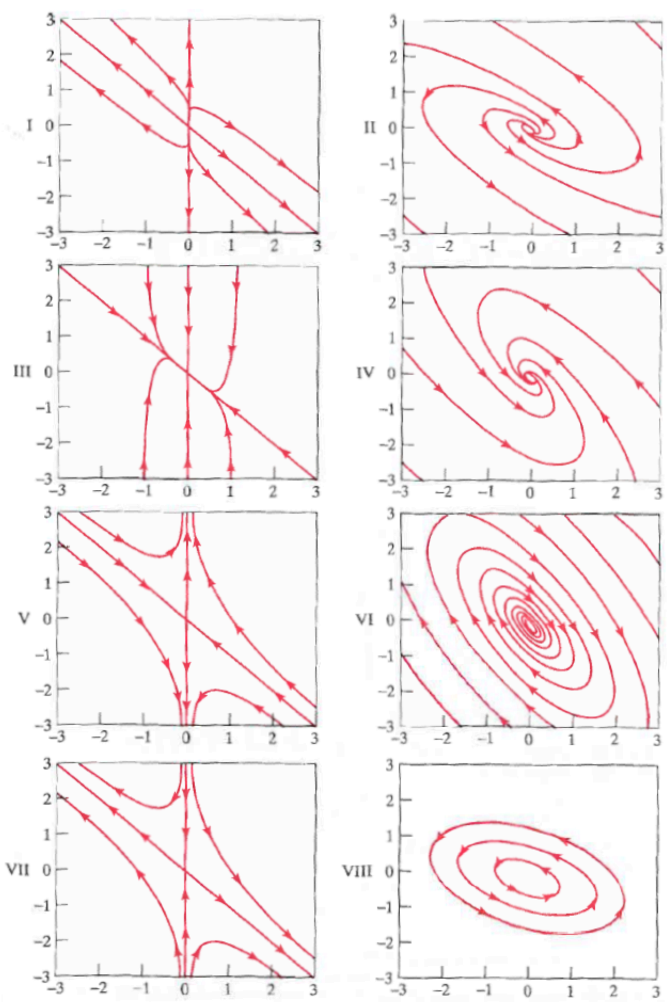
	A	λ_1	λ_2	v_1	v_2
a)	$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	3	6	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
b)	$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$	-3	-6	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
c)	$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	-3	6	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
d)	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 13 & -20 \\ 50 & -7 \end{pmatrix}$	$1 + 10i$	$1 - 10i$	$\begin{pmatrix} 1+3i \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix}$
e)	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -20 \\ 50 & -13 \end{pmatrix}$	$-1 + 10i$	$-1 - 10i$	$\begin{pmatrix} 1+3i \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1-3i \\ 5 \end{pmatrix}$

4. Finden Sie für jedes der folgenden dynamischen Systeme das entsprechende Phasenporträt.

   a) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2.5 & 0.5 \end{pmatrix} \vec{x}$

   b) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -1.5 & -1 \\ 2 & 0.5 \end{pmatrix} \vec{x}$

   c) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$



5. Die Koeffizientenmatrix A eines diskreten Entwicklungsmodells besitzt die Eigenschaften

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Was ist der Zustand

$$A^{99} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

b) Kann man sogar die Matrix A bestimmen?

6. Zwei Bestände von bösartigen Tierarten kämpfen um Leben und Tod. Während des Kampfes werden die zwei Populationsanzahlen $x(t)$ und $y(t)$ durch das folgende System modelliert:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \qquad -4y \ , \\ \dot{y} &= -x \ , \end{cases}$$

a) Welche Tierart ist am bösartigsten?

b) Welcher Bestand ist Sieger?
Wie hängt diese Antwort von den Anfangspopulationen ab?

Die Lösungen sind:

1. a) $\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\, e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\, e^{-5t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

   b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ -\sin t + 3\cos t \end{pmatrix}.$

   c) $\vec{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 4 + 4t \\ 1 + 2t \end{pmatrix}.$

2. $\vec{y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

3. a) Für $\vec{x}(t) \not\equiv 0$, $\vec{x}(t) \to +\infty \quad (t \to +\infty)$; 0 ist instabiler Gleichgewichtspunkt.

   b) Für $\vec{x}(t) \not\equiv 0$, $\vec{x}(t) \to 0 \quad (t \to +\infty)$; 0 ist stabiler Gleichgewichtspunkt.

   c) Für $\vec{x}(t) \not\equiv 0$, gilt für $t \to +\infty$

$$\vec{x}(t) \to \begin{cases} 0, & \text{wenn die Lsg entlang des zum neg. EW gehörenden EV verläuft} \\ +\infty, & \text{wenn die Lsg entlang des zum pos. EW gehörenden EV verläuft.} \end{cases}$$

   d) Für $\vec{x}(t) \not\equiv 0$, $\vec{x}(t) \to +\infty \quad (t \to +\infty)$.

e) Für $\vec{x}(t) \not\equiv 0$, $\vec{x}(t) \to 0 \quad (t \to +\infty)$.

4. a) Bild I.
   b) Bild IV.
   c) Bild V.

5. a) $A^{99}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

6. $x(t)$: die Populationsanzahl (zur Zeit t) des Bestandes X
   $y(t)$: die Populationsanzahl (zur Zeit t) des Bestandes Y.

   a) Y ist am bösartigsten
   b) Bestand Y gewinnt, falls $\frac{y(0)}{x(0)} > \frac{1}{2}$ und Bestand X gewinnt falls $\frac{y(0)}{x(0)} < \frac{1}{2}$.

MC-Serie 13

1. Die Matrix A habe die Eigenwerte 0 und 4 mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Wie lautet die erste Komponente der allgemeinen Lösung von $\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$?

(a) $x_1(t) = e^{c_1 t} + 2e^{4c_2 t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $x_1(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $x_1(t) = c_1 t + c_2 e^{4t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $x_1(t) = c_1 + c_2 e^{4t}$, mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Wir betrachten das folgende Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung $\vec{x}(t)$ des AWPs hat die Eigenschaft, dass

(a) $|\vec{x}(t)|$ für hinreichend grosse t immer grösser als 10 bleibt.

(b) $|\vec{x}(t)|$ für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$ bleibt.

(c) $|\vec{x}(t)|$ stets konstant gleich 1 bleibt.

(d) $|\vec{x}(t)|$ zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$ oszilliert.

3. Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Eigenwerte der Koeffizientmatrix A dieses AWP gleich $3 \pm 30i$ sind. Welche der folgenden Aussagen über die Lösung $\vec{x}(t)$ dieses AWPs ist korrekt?

(a) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer grösser als 10.

(b) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$.

(c) $|\vec{x}(t)|$ bleibt stets konstant gleich $\sqrt{2}$.

(d) $|\vec{x}(t)|$ oszilliert zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$.

4. Ein System wird durch das folgende diskrete Modell beschrieben:

$$\begin{cases} x(N+1) = -3x(N) + 4y(N) \\ y(N+1) = -2x(N) + 3y(N) \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Was ist der Zustand von $\begin{pmatrix} x(10) \\ y(10) \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2^9 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 5^8 \\ 4^8 \end{pmatrix}$

5. Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \dot{y}(t) &= 4\,x(t), \\ \dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 6\,y(t), \end{aligned}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

(a) $2x(1) + y(1) = e^{-4}$.

(b) $x(1) + 2y(1) = e^{-4}$.

(c) $2x(1) + y(1) = 2e^{3}$.

(d) $x(1) + 2y(1) = 2e^{3}$.

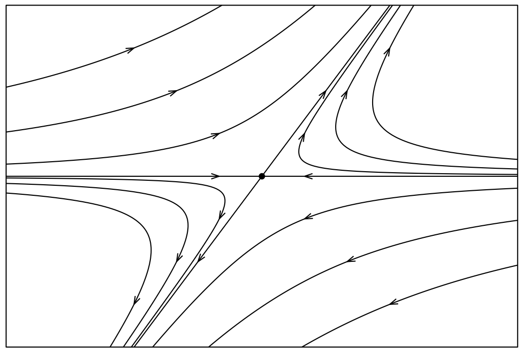
Hinweis: Schreibe das System um als

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + by(t), \\ \dot{y}(t) &= cx(t) + dy(t) \end{aligned}$$

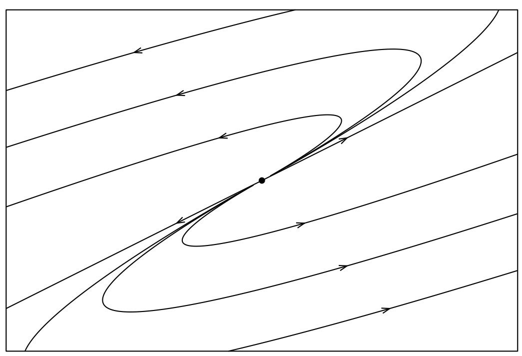
mit geeigneten Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

6. Die folgenden Bilder zeigen einige Lösungen $\vec{x}(t)$ linearer 2×2-Systeme $\dot{\vec{x}} = A\,\vec{x}$ für verschiedene Matrizen A. In welchem Fall hat A nichtreelle Eigenwerte?

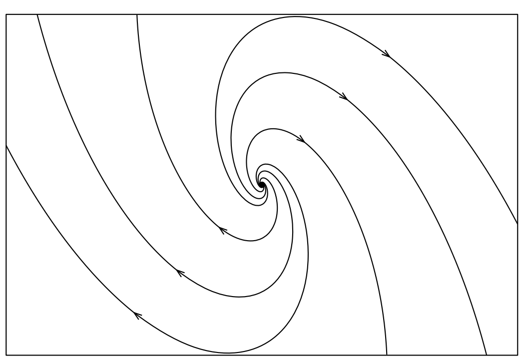
(a)



(b)



(c)

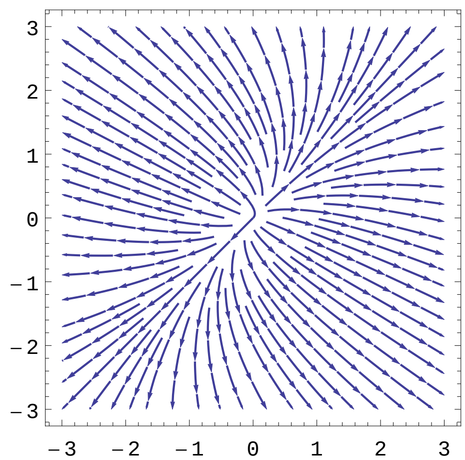


(d) in keinem Fall.

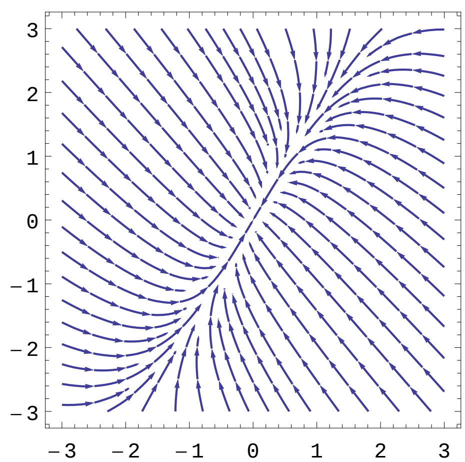
7. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$

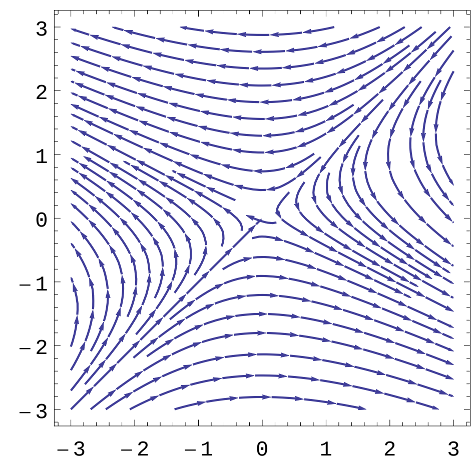
(a)



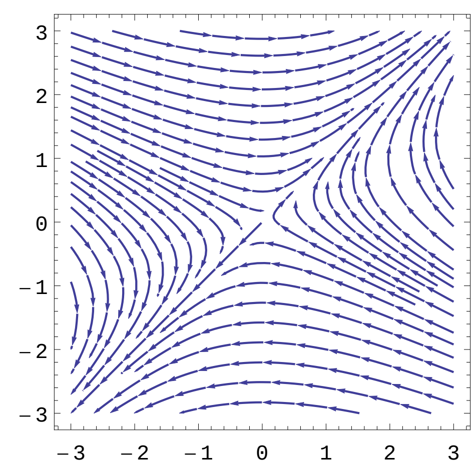
(b)



(c)



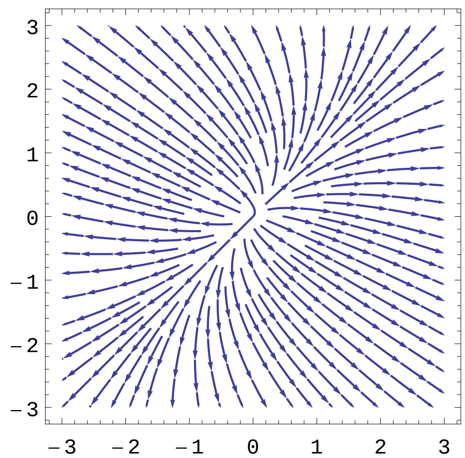
(d)



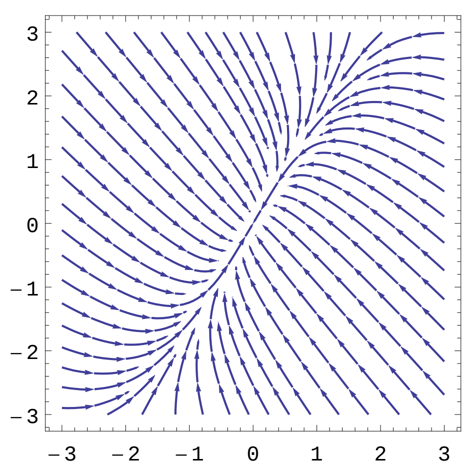
8. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$

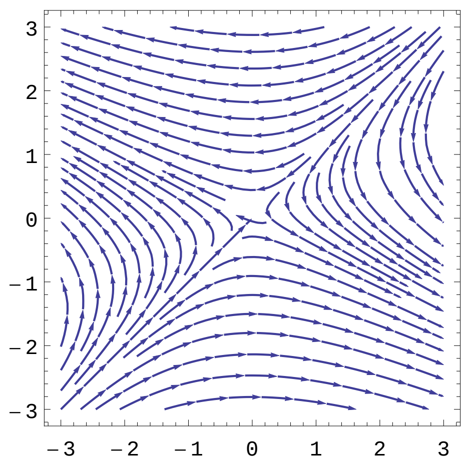
(a)



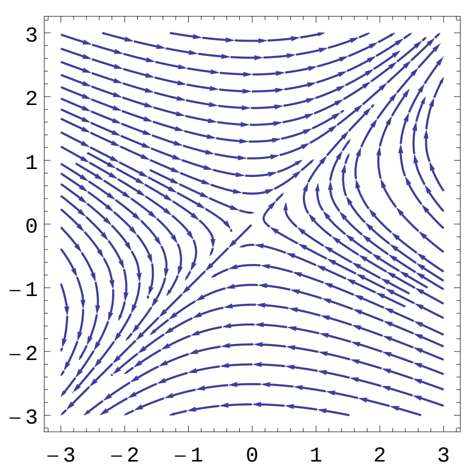
(b)



(c)



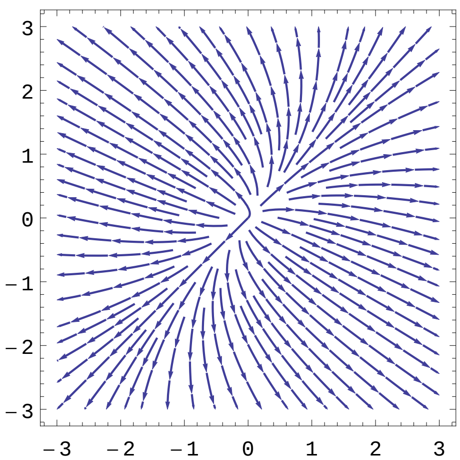
(d)



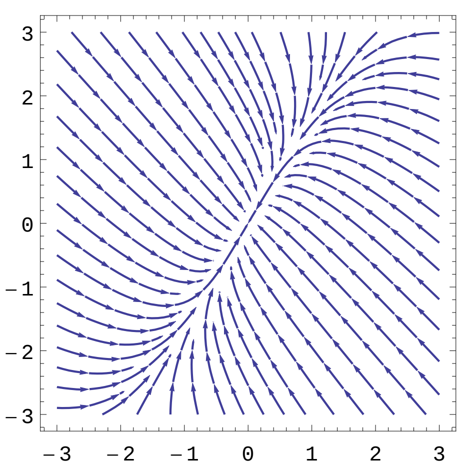
9. Was ist das Phasenportrait des Systems

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}\ ?$$

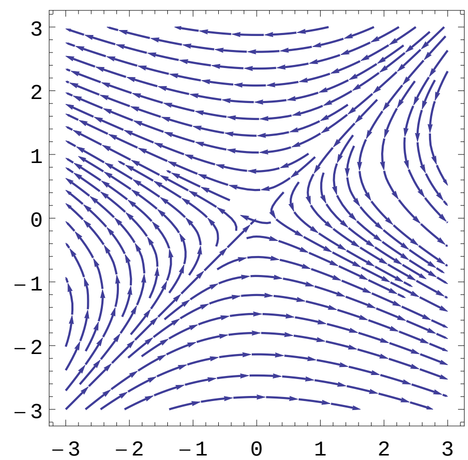
(a)



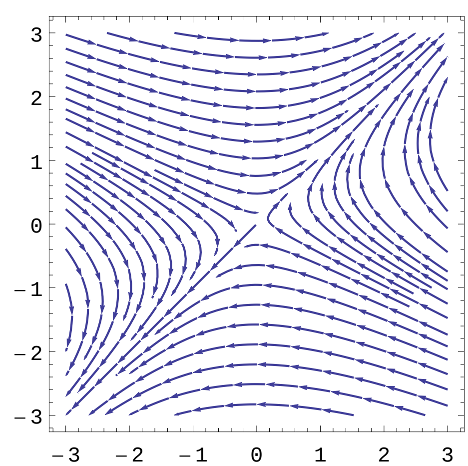
(b)



(c)



(d)



10. Wir betrachten das System

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \ ?$$

Dann gilt:

(a) Der Ursprung ist ein stabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind geschlossen.

(b) Der Ursprung ist ein stabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind nicht geschlossen.

(c) Der Ursprung ist ein instabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind geschlossen.

(d) Der Ursprung ist ein instabiler Fixpunkt und die anderen Bahnkurven sind nicht geschlossen.