D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 15
Dr. Ana Cannas

Serie 5: Integrationsmethoden

Bemerkung: Die Aufgaben dieser Serie bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 19. und 21. Oktober.

1. Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

   a) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{1} \left(\frac{t^7}{2} - \frac{1}{t^5}\right)\, dt$

   b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \sin 2\theta \, d\theta$

   c) $\displaystyle\int_{-4}^{4} |x| \, dx$

   d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin 2u}{2\sin u}\, du$

   e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 y \sin y \, dy$

   f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \alpha \, d\alpha$
   Hinweis: $\sin^3\alpha = \sin\alpha(1-\cos^2\alpha)$

2. Bestimmen Sie jeweils $\dfrac{dy}{dx}$:

   a) $\displaystyle y = \int_{x}^{0} \sqrt{1+t^2}\, dt$

   b) $\displaystyle y = \int_{1}^{\sin x} 3t^2 \, dt$

   c) $\displaystyle y = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{x}} \sin(t^2)\, dt$

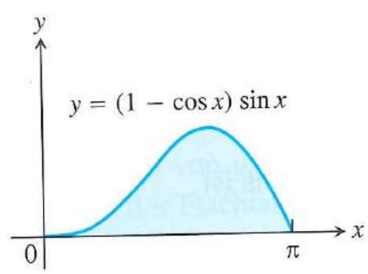
3. Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

   a) $\displaystyle\int_0^1 (4x+3)(4x^2+6x)^4\,dx$
      Hinweis: $u = 4x^2+6x$

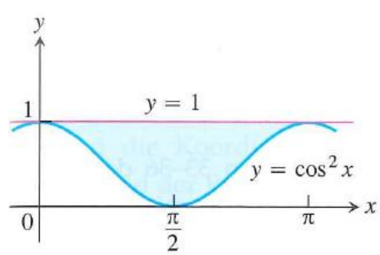
   b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t}{t^2+1}\,dt$

   c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\sqrt{2}+1)u^2}{\cos^2(\pi u^3)}\,du$

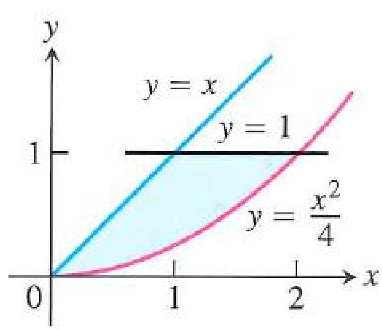
4. Berechnen Sie jeweils den Gesamtflächeninhalt des schattierten Gebietes:



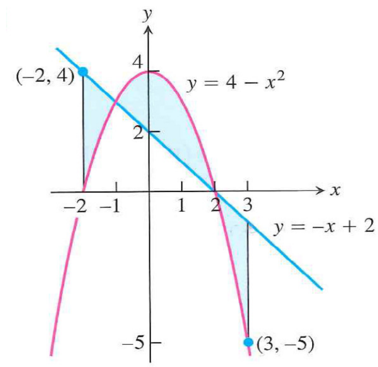
a)



b)



c)

d) 

5. Wir können $f(x) = \ln x$ mittels partieller Integration integrieren und eine Hilfsfunktion $g(x) = x$ betrachten:

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx \\ &= \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} - \int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)} \, dx \\ &= x \cdot \ln x - x + \text{Konst.}\end{aligned}$$

Der Schlüsselpunkt ist die Funktionen so zu wählen, dass sie die Rollen von $f(x)$ und $g(x)$ übernehmen.

a) Benutzen Sie wieder partielle Integration um folgendes unbestimmtes Integral zu finden:
$$\int x \ln x \, dx.$$

b) Benutzen Sie partielle Integration und Teil a) um folgendes unbestimmtes Integral zu finden:
$$\int x (\ln x)^2 \, dx.$$

c) Benutzen Sie partielle Integration mit $f(x) = \ln x$ und $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ um folgendes unbestimmtes Integral zu finden:
$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx.$$

d) Was passiert in der vorherigen Aufgabe, c), wenn Sie stattdessen $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $g'(x) = \ln x$ wählen, wobei Sie bereits ermittelt haben, dass man $g(x) = x \ln x - x$ nehmen kann? Kann man immer noch $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ bestimmen?

Hinweis: Partielle Integration mit dieser Wahl von $f(x)$ und $g(x)$ liefert

$$\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{f(x)} \underbrace{\ln x}_{g'(x)} \, dx = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=f(x)} \Bigg(\underbrace{x \ln x - x}_{g(x)} \Bigg) + \int \frac{2}{x^3} \left(x \ln x - x \right) \, dx$$
$$= \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 2 \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx + \frac{2}{x}.$$

Aus dieser Gleichung kann man immer noch $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$ bestimmen!

e) Bestimmen Sie

$$\int_1^e x^3 \ln x \, dx$$

durch partielle Integration.

6. Eine rationale Funktion von der Form

$$f(x) = \frac{ax + b}{(x - x_1)(x - x_2)},$$

mit $x_1 \neq x_2$ und a, b reell, lässt sich mithilfe der Partialbruchzerlegung wie folgt integrieren:

- Zuerst bestimmt man Koeffizienten A und B, so dass

$$f(x) = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

Nachdem man die Ausdrücke auf der rechten Seite auf den gleichen Nenner gebracht hat folgt, dass die Koeffizienten folgende Gleichung erfüllen müssen:

$$ax + b = A(x - x_1) + B(x - x_2).$$

Da lineare Funktionen von der Form $ax + b$ gleich sind genau dann, wenn ihre Koeffizienten (Steigung a und Konstante b) gleich sind, folgt dass

$$\begin{cases} a & = A + B \\ b & = -x_1 A - x_2 B, \end{cases}$$

wobei sich die Unbekannten A und B bestimmen lassen.

- Wir wissen schon, dass

$$\int \frac{A}{x - x_1} \, dx = A \ln |x - x_1| + \text{Konst.}$$

a) Bestimmen Sie
$$\int \frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}\,dx.$$
b) Bestimmen Sie
$$\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2}\,dx.$$
Hinweis: Mitternachtsformel.

c) Bestimmen Sie
$$\int \frac{2x^2-x-3}{x^2-3x+2}\,dx.$$
Hinweis: Verwenden Sie Polynomdivision
$$2x^2-x-3=2(x^2-3x+2)+5x-7,$$
um den Integranden umzuschreiben:
$$\frac{2x^2-x-3}{x^2-3x+2}=2+\frac{5x-7}{x^2-3x+2}.$$
d) Bestimmen Sie
$$\int \frac{3x^2}{x^2-3x+2}\,dx.$$
e) Können Sie noch
$$\int \frac{2}{x(x-1)(x-2)}\,dx$$
bestimmen?

Hinweis: Bestimmen Sie A, B, C, so dass
$$\frac{2}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}.$$
f) Bestimmen Sie
$$\int \frac{x}{x^3-3x^2+2x}\,dx.$$
g) Wenn es einen doppelten linearen Faktor gibt,
$$\int \frac{cx+d}{(x-a)^2}\,dx,$$
wird die Partialbruchzerlegung angepasst,
$$\frac{cx+d}{(x-a)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}.$$
Bestimmen Sie
$$\int \frac{x}{(x-2)^2}\,dx.$$

h) Bestimmen Sie

$$\int \frac{8x^2 - 2x - 43}{(x-5)(x+2)^2} dx$$

7. Wir betrachten die uneigentlichen Integrale der Form

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx,$$

wobei $p > 0$.

a) Wählen Sie eine Stammfunktion für $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ und integrieren Sie

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p}\, dx,$$

wobei $0 < \varepsilon < 1$.
Sie müssen den Fall $p = 1$ separat behandeln.

b) Für welche Exponenten p konvergiert das uneigentliche Integral?
Hinweis: Lassen Sie $\varepsilon \to 0^+$.

Die Lösungen sind:

1. a) $-\frac{3}{4}$
   b) $\frac{\sqrt{2}-2}{4}$
   c) 16
   d) -1
   e) $\frac{3}{64}$
   f) $\frac{2}{3}$
2. a) $-\sqrt{1+x^2}$
   b) $3\sin^2 x \cos x$
   c) $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$
3. a) 10^4
   b) $\ln \frac{5}{2}$
   c) $\frac{1}{3\pi}$

4. a) 2
   b) $\frac{\pi}{2}$
   c) $\frac{5}{6}$
   d) $\frac{49}{6}$
5. a) $\frac{1}{2}x^2\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$
   b) $\frac{1}{2}x^2\left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C$
   c) $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C$
   d) $-\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C$
   e) $\frac{3e^4+1}{16}$
6. a) $2\ln|x-3| + 3\ln|x-2| + C$
   b) $3\ln|x-2| + 2\ln|x-1| + C$
   c) $2x + 3\ln|x-2| + 2\ln|x-1| + C$
   d) $3x + 12\ln|x-2| - 3\ln|x-1| + C$
   e) $\ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln|x-2| + C$
   f) $\ln|x-2| - \ln|x-1| + C$
   g) $\ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$
   h) $3\ln|x-5| + 5\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + C$
7. a) $p \neq 1$: $\frac{1}{1-p}(1-\varepsilon^{-p+1})$, $p = 1$: $-\ln\varepsilon$
   b) konvergiert für $0 < p < 1$

MC-Serie 5

1. Seien f und g integrierbare Funktionen mit

$$\int_1^2 f(x)dx = -4\,, \qquad \int_1^5 f(x)dx = 6\,, \qquad \int_2^5 g(x)dx = 8\,.$$

Dann ist das Integral

$$\int_2^5 (2f(x) - g(x))\,dx$$

gleich

(a) -12 .

(b) -4 .

(c) 4 .

(d) 12 .

2. Das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx$$

ist gleich

(a) $\frac{14}{9}$.

(b) $\frac{14}{3}$.

(c) 14 .

(d) 42 .

3. Lösen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx$. Auf die Konstante aufpassen!

(a) $\dfrac{x^2}{x+1} + C$

(b) $x - \dfrac{1}{x+1} + C$

(c) $\dfrac{2}{(x+1)^3} + C$

(d) $\dfrac{x^2+x+2}{x+1} + C$

4. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx$$

ist gleich

(a) $\ln \frac{1}{3}$.

(b) $\ln \frac{4}{3}$.

(c) $\ln 3$.

(d) $\ln 12$.

5. Wie lautet die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \int_0^{x^2} \cos t\,dt\ ?$$

(a) $2x + \cos x$.

(b) $2x \sin x$.

(c) $2x \cos(x^2)$.

(d) $\cos(x^2) - 1$.

6. Welche der folgenden Funktionen ist für $x > 0$ **nicht** monoton wachsend?

(a) $x \mapsto \int_0^x t\,dt$.

(b) $x \mapsto \int_0^x t^2\,dt$.

(c) $x \mapsto \int_0^x \sin t\,dt$.

(d) $x \mapsto \int_0^x \sin^2 t\,dt$.

7. Sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion.
Die Formel

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

(a) ist im Allgemeinen falsch.

(b) folgt aus der Substitutionsregel.

(c) folgt aus der partiellen Integration.

(d) ist falsch, falls f eine konstante Funktion ist.

8. Entscheiden Sie welche Aussage richtig ist:

(a) $\int x \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x + C$.

(b) $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + C$.

(c) $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$.

(d) $\int x \sin x \, dx = -\frac{x^2}{2} \cos x + \sin x + C$.

9. Welche der folgenden Rechnungen ist **keine** korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(a) $$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx.$$

(b) $$\int \sin\phi \cdot \cos\phi \, d\phi = -\cos\phi \cdot \cos\phi + \int \cos\phi \cdot \sin\phi \, d\phi.$$

(c) $$\int 2x^3 e^{x^2} \, dx = x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} \, dx.$$

(d) $$\int x\sqrt{x+1} \, dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx.$$

10. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ und $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ konvergieren beide.

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ konvergiert, aber $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ divergiert.

(c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ konvergiert, aber $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ divergiert.

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ und $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ divergieren beide.