D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 15

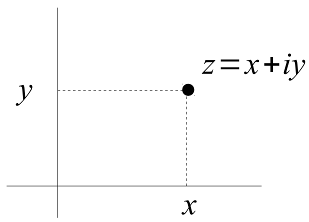
Dr. Ana Cannas

Serie 6: Komplexe Zahlen

Bemerkung: Die Aufgaben dieser Serie bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 26. und 28. Oktober.

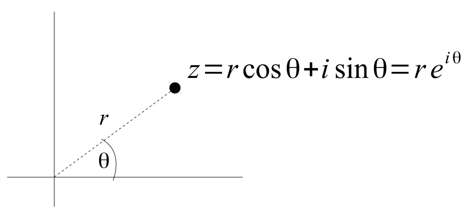
Es gibt zwei Darstellungsformen komplexer Zahlen:

- die **Normalform** oder kartesische Form, wobei die kartesischen Koordinaten als Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z dienen;



$$\begin{cases} x &= \mathrm{Re} z \\ y &= \mathrm{Im} z \end{cases}$$

- und die **Polarform**, die sich äquivalent in der trigonometrischen Form und in der Exponentialform darstellen lässt, wobei die *Polarkoordinaten* r und θ als Betrag und Argument einer komplexen Zahl z dienen.



$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}$$

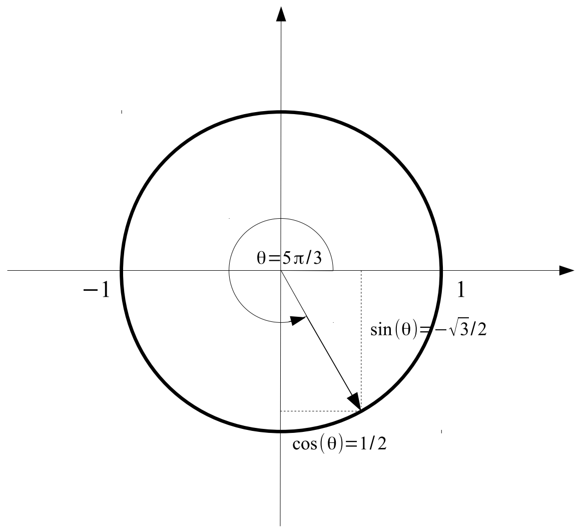
Die **Eulersche Formel**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ermöglicht die direkte Umrechnung zwischen der trigonometrischen und der Exponentialform.

Zum Beispiel, hat $z = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$ Betrag $r = 8$, Argument $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, Realteil $x = 8\cos\dfrac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}$ und Imaginärteil $y = 8\sin\dfrac{\pi}{6} = 4$, kann also äquivalent geschrieben werden als $z = 4\sqrt{3} + 4i$.

Nun hat $z = 1 - \sqrt{3}i$ Realteil $x = 1$, Imaginärteil $y = -\sqrt{3}$, Betrag $r = \sqrt{1^2 + 3} = 2$ und sein Argument erfüllt $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{2}$ und $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, durch Betrachtung des Einheitskreises folgt, dass $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$:



Die zu $z = x + iy = re^{i\theta}$ **konjugierte** komplexe Zahl ist $\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$.

Abhängig vom betrachteten Problem, ist eine oder die andere Darstellung nützlicher. Während für die Addition die Normalform von Vorteil ist,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\mathrm{Re}(z_1+z_2)} + i \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\mathrm{Im}(z_1+z_2)}, \end{aligned}$$

ist die Multiplikation mit der Polarform einfacher,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left(r_1 e^{i\theta_1}\right) \cdot \left(r_2 e^{i\theta_2}\right) \\ &= (r_1 r_2) e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \end{aligned}$$

Die Polarform ist somit praktischer um Potenzen zu berechnen und n-te Wurzeln zu ziehen. Daraus folgen insbesondere *trigonometrische Formeln* für Summen und Potenzen von Winkeln:

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$$

und somit

$$\begin{aligned} \underbrace{\cos(\theta_1 + \theta_2)}_{\mathrm{Re}\left(e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right)} &= \underbrace{\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2}_{\mathrm{Re}\left(e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}\right)} \\ \underbrace{\sin(\theta_1 + \theta_2)}_{\mathrm{Im}\left(e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right)} &= \underbrace{\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2}_{\mathrm{Im}\left(e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}\right)} \end{aligned}$$

und aus

$$e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$$

folgen

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re}\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)^n$$
$$\sin(n\theta) = \operatorname{Im}\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)^n.$$

Sei

$$z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$$

eine komplexe Zahl. Es folgt aus der Multiplikation komplexer Zahlen, dass die **n-ten Wurzeln** von z_0, d.h. die n Lösungen z der Gleichung

$$z^n = z_0,$$

die Zahlen von der Form

$$z = \underbrace{\sqrt[n]{r_0}}_{\text{Betrag}}\, e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

sind.

Der **Fundamentalsatz der Algebra** (Gauss) besagt, dass jede Polynomgleichung der Form

$$a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0 = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \cdots, a_n$, mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ genau n komplexe Lösungen hat. Dabei wird jede mehrfache Nullstelle mit ihrer Vielfachheit gezählt.

1. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden Zahlen:

   a) $\dfrac{1}{1+i}$.

   b) $\dfrac{3+4i}{2-i}$.

   c) $e^{-1+\pi i}$.

   d) $2e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

   e) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2012}$.

   f) die beiden Quadratwurzeln von i.

2. Bestimmen Sie Betrag und Argument der folgenden Zahlen:

   a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

   b) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

   c) $-3\sqrt{3} - 3i$.

   d) $7e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

   e) die drei dritten Wurzeln von $8i$.

   f) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}}$.

3. Wie können Sie die folgenden komplexen Zahlen aus $z = x + iy$ geometrisch gewinnen? Skizzieren sie.

a) $z + (2 - 3i)$
b) $\overline{z}$
c) $-z$
d) $\overline{(-z)}$
e) $\frac{1}{z}$
f) z^2
g) $\frac{z}{|z|}$

4. Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in der komplexen Zahlenebene. Eine grundlegende Strategie ist die Gleichungen, welche die Mengen definieren, bezüglich x und y umzuschreiben.

$$\begin{aligned}
&A := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z - i| = 4 \,\}. \\
&B := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re} z + \mathrm{Im} z = 0 \,\}. \\
&C := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, 1 \le |z - i| \le 2 \,\}. \\
&D := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z + i| = |z - 1| \,\}. \\
&E := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \ge 1,\ |\mathrm{Re}\, z| \le 1/2,\ \mathrm{Im}\, z > 0 \,\}. \\
&F := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\ |i\bar{z}| = 2,\ \mathrm{Re}(i\bar{z}) = \sqrt{3} \,\}. \\
&G := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, z = \frac{3}{2} e^{i\pi t} + \frac{1}{2} e^{-i\pi t},\ 0 \le t \le 2 \,\}
\end{aligned}$$

Hinweis zu G: Benutzen Sie die Eulersche Formel, um den Realteil x und den Imaginärteil y eines Punktes z von G zu bestimmen. Sie finden dann die Gleichung $\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + y^2 = 1$, die eine Ellipse darstellt.

5. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

a) $z^2 = -9$
b) $z^3 = 8$
c) $z^3 = -27i$
d) $z^4 + 1 = 0$
e) $z^2 - 2z - 1 = 0$
f) $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$
Hinweis: Das ist eine quadratische Gleichung in $w = z^3$.

6. Es sei

$$P(z) = az^2 + bz + c, \qquad z \in \mathbb{C},$$

eine polynomiale Funktion mit reellen Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass mit jeder Wurzel z von P auch $\bar{z}$ eine solche Wurzel ist.
b) Angenommen, P nimmt die folgenden Werte an:

$$P(0) = 3, \quad \text{und} \quad P(i) = -2 + 2i.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c.

7. Sei Rez der Realteil der Zahl z und Imz ihr Imaginärteil. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahen z, z_1 und z_2 die folgenden Beziehungen gelten:

   a) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z$
   b) $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}z$
   c) $|\mathrm{Re}z| \leq |z|$
   d) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$
   e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Die Lösungen sind:

1. a) $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}z = \frac{1}{2}$
   b) $\mathrm{Re}z = \frac{2}{5}$, $\mathrm{Im}z = \frac{11}{5}$
   c) $\mathrm{Re}z = -\frac{1}{e}$, $\mathrm{Im}z = 0$
   d) $\mathrm{Re}z = -\sqrt{2}$, $\mathrm{Im}z = \sqrt{2}$
   e) $\mathrm{Re}z = 1$, $\mathrm{Im}z = 0$
   f) $\mathrm{Re}z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{Im}z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. a) $r = 1$, $\theta = \frac{\pi}{3}$
   b) $r = 2$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$
   c) $r = 6$, $\theta = \frac{7\pi}{6}$
   d) $r = 7$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$
   e) $r_1 = r_2 = r_3 = 2$, $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$, $\theta_3 = \frac{3\pi}{2}$
   f) $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$
5. a) $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$
   b) $z_1 = 2$, $z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$
   c) $z_1 = 3i$, $z_2 = 3e^{\frac{7\pi}{6}i}$, $z_3 = 3e^{\frac{11\pi}{6}i}$
   d) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_1 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$
   e) $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$
   f) $z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$, $z_3 = \sqrt[6]{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$, $z_4 = \sqrt[6]{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z_5 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$, $z_6 = \sqrt[6]{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$
6. b) $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$

MC-Serie 6

1. Sei $z \in \mathbb{C}$. Stets reell ist

(a) $z - \bar{z}$.

(b) $\frac{z}{\bar{z}}$.

(c) z^2.

(d) $e^z e^{\bar{z}}$.

2. Sei $z \in \mathbb{C}$. Welche Aussage ist im Allgemeinen **falsch**?

(a) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(iz)$.

(b) $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(iz)$.

(c) $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Im}(iz)$.

(d) $\mathrm{Im}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(iz)$.

3. Die Punktemenge

$$\{z \in \mathbb{C} |\ |z - 9| = 4\}$$

ist ein Kreis

(a) um $z_0 = 4$ mit Radius 9.

(b) um $z_0 = 4$ mit Radius 3.

(c) um $z_0 = 9$ mit Radius 4.

(d) um $z_0 = 9$ mit Radius 2.

4. Die Punktemenge $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = \mathrm{Re}(z) + 1\}$ ist

(a) eine Ellipse.

(b) eine Parabel.

(c) eine Hyperbel.

(d) keine der obigen Kurven.

5. Der Wert von $e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ is gleich

(a) 1

(b) $-i$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{i}{2}$

(d) keine der obigen

6. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z = \sqrt{3} - i$ und $w = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Welche Aussage über $\frac{z}{w}$ ist korrekt?

(a) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = 4$ und $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{7\pi}{6}$.

(b) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = 4$ und $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

(c) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = 1$ und $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{7\pi}{6}$.

(d) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = 1$ und $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

7. Die Nullstellen des Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 3$$

sind

(a) $\sqrt{2} + i$, $\sqrt{2} - i$.

(b) $1 + \sqrt{2}i$, $1 - \sqrt{2}i$.

(c) $(\sqrt{2} + 1)i$, $(\sqrt{2} - 1)i$.

(d) keine der obigen.

8. Die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda) = \lambda^3 + 8$ sind

(a) -2, $2i$, $-2i$.

(b) -2, $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

(c) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$, -2.

(d) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{i\pi}$, $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

9. Gegeben sei das Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 2$. Bemerken Sie, dass $p(\lambda)$ nur von λ^2 abhängt.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Das Polynom hat keine Nullstellen (weder reelle noch komplexe).

(b) p hat mindestens eine reelle Nullstelle.

(c) p hat 2 Paare komplex konjugierte Nullstellen.

(d) Die Nullstellen können nicht bestimmt werden.

10. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen mit $z^4 = 1$ und $w^3 + i = 0$.

Welche der folgenden Zahlen sind mögliche Werte der Summe $z + w$?

(a) i.

(b) $\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) 1.

(d) $\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.