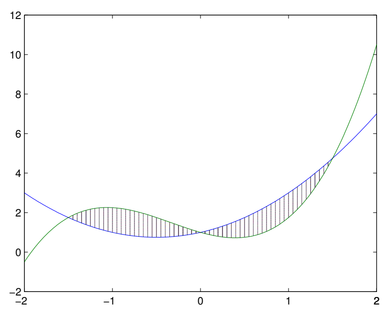
D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I HS 15
Dr. Ana Cannas

Serie 4: Flächeninhalt und Integration

Bemerkung: Die Aufgaben dieser Serie bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 12. und 14. Oktober.

1. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen

$$f(x) = x^2 + x + 1 \text{ und } g(x) = x^3 + x^2 - \frac{5}{4}x + 1.$$



   a) Berechnen Sie die Stellen $x_1 < x_2 < x_3$, an denen sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.
   b) Berechnen Sie das Integral $\int_{x_1}^{x_3}(f(x) - g(x))dx$.
   c) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

2. Bestimmen Sie zu jeder Funktion f aus den Aufgaben a) - g) eine Stammfunktion. Erledigen Sie so viel wie möglich im Kopf. Überprüfen Sie Ihre Antworten durch Differentiation. Es ist $f(x) =$...

   a) i. $2x$ ii. x^2 iii. $x^2 - 2x + 1$

   b) i. $-3x^{-4}$ ii. x^{-4} iii. $x^{-4} + 2x + 3$

c) i. $\frac{1}{x^2}$ ii. $\frac{5}{x^2}$ iii. $2 - \frac{5}{x^2}$

d) i. $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ ii. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ iii. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

e) i. $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ii. $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ iii. $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

f) i. $-\pi \sin \pi x$ ii. $3 \sin x$ iii. $\sin \pi x - 3 \sin 3x$

g) i. $\sec^2 x$ ii. $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$ iii. $-\sec^2 \frac{3x}{2}$

3. Diskutieren Sie den Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 2}$$

anhand der folgenden Schritte:

a) Was ist der Definitionsbereich von f?

b) Ist diese Funktion gerade, ungerade oder weder gerade, noch ungerade?

c) Was sind die Nullstellen von f?

d) Was ist die Ableitung von f?

e) Wo ist die Tangente des Funktionsgraphen waagrecht?
Hinweis: Das Polynom $2x^5 - 8x^3 + 6x$ verschwindet genau dann, wenn $x = 0$ oder $2x^4 - 8x^2 + 6 = 0$. Da $2x^4 - 8x^2 + 6 = 0$ ein quadratisches Polynom in x^2 ist, können wir seine Nullstellen mittels Mitternachtsformel bestimmen: $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ genau dann, wenn $x^2 = 1$ oder $x^2 = 3$, also $x = \pm 1$ oder $x = \pm\sqrt{3}$.

f) Was sind die offenen Intervalle, auf denen die Funktion wächst und auf denen sie fällt?

g) Besitzt f lokale Extremwerte? Sattelpunkte?

h) Was sind die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x), \quad \lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x)?$$

i) Was ist der Grenzwert

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)?$$

j) Skizzieren Sie den Graph von f.

4. Wir betrachten die Gleichung[1]

$$x - 0.1 \sin x = 0.85.$$

   a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung wenigstens eine Lösung zwischen 0 und π besitzt.

      Hinweis: Zwischenwertsatz.

   b) Approximieren Sie diese Lösung, indem Sie zwei Iterationsschritte des Newtonschen Verfahrens für $f(x) = x - 0.1 \sin x - 0.85$ mit dem Startwert $x_0 = \pi$ berechnen.

      Benutzen Sie einen Taschenrechner für die Iteration.

5. Die Ableitung einer Potenzfunktion x^p, wobei p eine beliebige reelle Zahl (für $x > 0$) ist, ist

$$(x^p)' = p\, x^{p-1}.$$

   Es folgt, dass Stammfunktionen von Funktionen der Form $p\, x^{p-1}$ wie folgt aussehen

$$\int p\, x^{p-1}\, dx = x^p + \text{Konst.}$$

   Division durch p, *sofern dies nicht Null ist*, liefert

$$\int x^{p-1}\, dx = \frac{x^p}{p} + \text{Konst.}$$

   oder, durch Umbenennung des Exponenten ($p = a + 1$), erhält man die folgende Formel, *gültig für* $a \neq -1$:

$$\boxed{\int x^a\, dx = \tfrac{x^{a+1}}{a+1} + \text{Konst.}}$$

   Für den Fall $p = -1$, verwenden wir die Ableitung der Logarithmusfunktion

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

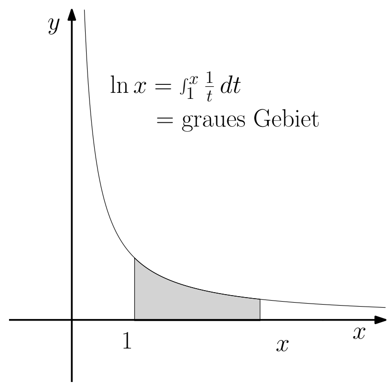
   Geometrisch betrachtet stellt $\ln x$ die Fläche zwischen der x-Achse und des Graphen von $\dfrac{1}{x}$ zwischen 1 und x dar, wenn $x > 1$:

---

[1] Zur Bestimmung des zeitlichen Ablaufs der Bewegung eines Planeten hat man die sogenannte *exzentrische Anomalie* φ des Planeten zur Zeit t. Diese genügt der *Keplerschen Gleichung*

$$\varphi - \varepsilon \sin \varphi = \frac{2\pi t}{U}, \tag{1}$$

wobei die numerische Exzentrizität der Bahnellipse $\varepsilon = 0.1$, und $\dfrac{2\pi t}{U} = 0.85$ mit U die Umlaufzeit und t die seit dem Periheldurchgang verstrichene Zeit bezeichnen, realistische Werte sind.



Im Allgemeinen (für $x \neq 0$) gilt

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + \text{Konst},}$$

wobei der Fall wenn $x < 0$ von der Kettenregel folgt

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Erhalten Sie ähnliche Formeln für:

a) $\int (x-b)^a dx$

b) $\int \frac{1}{x-b} dx$

c) Was ist der Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen von $\frac{1}{1+x}$ im vertikalen Streifen zwischen der y-Achse und der Gerade $x = e - 1$?

Die Lösungen sind:

1. a) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{2}$.

   b) 0

   c) $\frac{81}{32}$

2. a) x^2, $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$.

   b) x^{-3}, $\frac{x^{-3}}{-3}$, $\frac{x^{-3}}{-3} + x^2 + 3x$.

   c) $-\frac{1}{x}$, $-\frac{5}{x}$, $2x + \frac{5}{x}$.

   d) $\sqrt{x^3}$, $\sqrt{x}$, $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}$.

e) $x^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{-\frac{1}{3}}$.

f) $\cos \pi x$, $-3\cos x$, $-\frac{1}{\pi}\cos \pi x + \cos 3x$.

g) $\tan x$, $2\tan\frac{x}{3}$, $-\frac{2}{3}\tan\frac{3x}{2}$.

3. a) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, d.h. $\mathbb{R}\backslash\{\pm\sqrt{2}\}$

b) Die Funktion f ist gerade.

c) $x = \pm\sqrt[4]{3}$.

d) $f'(x) = \frac{2x^5-8x^3+6x}{x^4-4x^2+4}$

e) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$ und $x_{4,5} = \pm\sqrt{3}$.

f) f ist für die Intervalle $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-1, 0)$, $(1, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ monoton fallend und für die Intervalle $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -1)$, $(0, 1)$, $(\sqrt{3}, +\infty)$ monoton wachsend.

g) f besitzt lokale Minima bei 0 und $\pm\sqrt{3}$, lokale Maxima bei ± 1.

h) $\lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x) = -\infty$

i) $+\infty$

4. a) $f(0) = -0.85 < 0$, $f(\pi) = \pi - 0.85 > 0$ und Zwischenwertsatz.

b) $x_1 \approx 1.058$, $x_2 \approx 0.931$.

5. a) $\int (x-b)^a dx = \frac{(x-b)^{a+1}}{a+1} +$ Konst, $a \neq -1$

b) $\int \frac{1}{x-b} dx = \ln|x-b| +$ Konst, $x \neq b$

c) 1

MC-Serie 4

1. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2$$

im Intervall $[0, 1]$ ist richtig?

(a) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = \frac{1}{3}$ an.

(b) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = \frac{1}{3}$ an.

(c) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = \frac{2}{3}$ an.

(d) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = \frac{2}{3}$ an.

2. Das Maximum der Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

im Intervall $[1, 5]$ ist

(a) 0.

(b) 1.

(c) $\frac{1}{e}$.

(d) $\frac{\ln 5}{5}$.

3. Das Minimum der Funktion

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

im Intervall $[1, 5]$ ist

(a) 0.

(b) 1.

(c) $\frac{1}{e}$.

(d) $\frac{\ln 5}{5}$.

4. Es sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine dreimal differenzierbare Funktion und $x \in \mathbb{D}$.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Gilt $f'(x) = 0$, so nimmt f in x ein Extremum an.

(b) Gilt $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$, so nimmt f in x ein Maximum an.

(c) Gilt $f'(x) = f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so hat f in x einen Wendepunkt.

(d) Nimmt f in x ein Extremum an, so gelten $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$.

5. Sei x_n eine Approximation von einer Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^2 - \alpha$$

wobei $\alpha > 0$. Was ist unter Anwendung des Newtonverfahrens die nächste Approximation x_{n+1}?

(a) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$

(b) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{\alpha}{x_n}\right).$

(c) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right).$

(d) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n - \frac{\alpha}{x_n}\right).$

6. Approximieren Sie den Wert $\sqrt{5}$, indem Sie zwei Iterationsschritte des Newtonschen Verfahrens für $f(x) = x^2 - 5$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ berechnen. Dann ergibt sich die Approximation:

(a) $x_2 = \frac{7}{3}$

(b) $x_2 = \frac{47}{21}$

(c) $x_2 = \frac{2207}{987}$

(d) $x_2 = \frac{4870847}{2178309}$

7. Welche ist eine korrekte Stammfunktion von

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+2x}?$$

(a) $\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|.$

(b) $\arctan(x) - \frac{2}{(1+2x)^2}.$

(c) $\operatorname{arsinh}(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|.$

(d) $\operatorname{arsinh}(x) - \frac{2}{(1+2x)^2}.$

8. Seien F, G Stammfunktionen von f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$. Welche der Aussagen ist **falsch**?

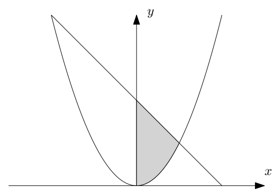
(a) $F + G$ ist eine Stammfunktion von $f + g$.

(b) FG ist eine Stammfunktion von fg.

(c) Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $F + c$ eine Stammfunktion von f.

(d) FG ist eine Stammfunktion von $fG + Fg$.

9. Wie gross ist der Flächeninhalt F der Figur im ersten Quadrant, die zwischen der Parabel $y = x^2$ und der Geraden $y = 2 - x$ liegt?



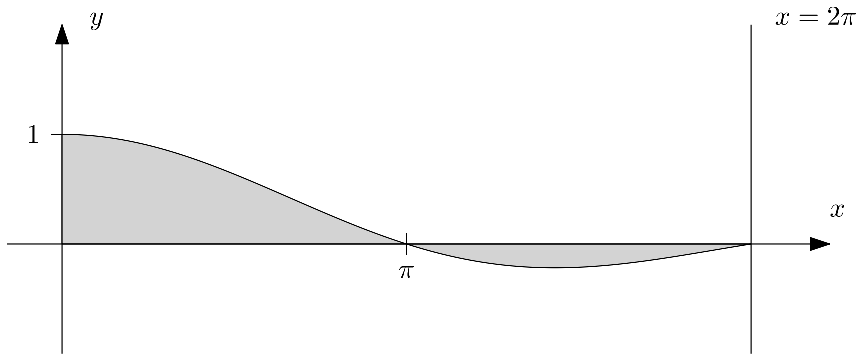
(a) $F = \dfrac{7}{6}$.

(b) $F = \dfrac{4}{3}$.

(c) $F = \dfrac{5}{6}$.

(d) $F = \dfrac{10}{3}$.

10. Der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $x \to \dfrac{\sin x}{x}$, den beiden Koordinatenachsen und der Geraden $x = 2\pi$ begrenzt wird



ist

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin |t|}{|t|}\, dt.$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\, dt.$

(d) $\displaystyle\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt\right|.$