D-ERDW, D-HEST, D-USYS   Mathematik I und II   HS 2014 und FS 2015
Dr. Ana Cannas

Zwischenprüfung

18. Februar 2015 - 13:15-14:45 - 90 Minuten

---

1. Welche Vektoren sind orthogonal und der Länge 4?

(a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\0\end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

2. Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix}2 & 0 & -6 & 7\\ 7 & 1 & -9 & 8\\ -1 & 0 & 5 & -4\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ ist

(a) -30.

(b) -2.

(c) 2.

(d) 30.

Bitte wenden ↪

3. Welche der folgenden Aussagen ist *im Allgemeinen* für reelle invertierbare $n \times n$-Matrizen A und B sowie Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ **falsch**?

(a) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

(b) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

(c) $\det(A^T) = \det A$.

(d) $\det(AB) = \det A \det B$.

4. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat

(a) keine Lösung.

(b) eine eindeutige Lösung.

(c) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(d) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

5. Sei A^{-1} die zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ inverse Matrix. Die Summe der Spalten von A^{-1} ist

(a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Ist A eine quadratische Matrix mit $\det A = 0$ und der Vektor $\vec{b}$ eine der Spalten der Matrix A, so ist die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$

(a) auf jeden Fall unlösbar.

(b) auf jeden Fall eindeutig lösbar.

(c) auf jeden Fall mehrdeutig lösbar.

(d) manchmal unlösbar, manchmal eindeutig lösbar, manchmal mehrdeutig lösbar, hängt von A und $\vec{b}$ ab.

7. Sei A eine quadratische $n \times n$ Matrix. Welche Aussage ist **nicht** äquivalent zu den anderen?

(a) $\det A = 0$.

(b) $\operatorname{Rang} A = n$.

(c) die Spalten von A bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$.

(d) die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar für jedes $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

8. Der Nullraum der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

hat Dimension gleich

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

9. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

10. Sei A eine 2×2 Matrix mit Eigenwerten 2 und -2. Welche der folgenden Aussagen über die Potenz A^2 ist korrekt?

(a) Die Eigenwerte von A^2 sind 2 und -2.

(b) Die Eigenwerte von A^2 sind 4 und -4.

(c) A^2 hat nur 4 als Eigenwert und A^2 ist diagonalisierbar.

(d) A^2 hat nur 4 als Eigenwert und A^2 ist nicht diagonalisierbar.

11. Die Matrix A habe die Eigenwerte 0, 1 und 2 mit entsprechenden zugehörigen Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wie lautet die erste Komponente der allgemeinen Lösung von $\dot{\vec{y}}(t) = A\,\vec{y}(t)$?

(a) $y_1(t) = 3k_1 + 4k_2e^t$ wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $y_1(t) = 3 + 4k_2e^t$ wobei $k_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $y_1(t) = 4k_2e^t + k_3$ wobei $k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

(d) $y_1(t) = 3k_1 + 4k_2e^t + k_3e^{2t}$ wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

12. Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y \ , \\ \dot{y} &= -4x + 5y \ , \end{aligned}$$

dessen Koeffizientenmatrix den einzigen Eigenwert 3 besitzt mit zugehörigem Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wie lautet die allgemeine Lösung dieses Systems?

(a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ 2k_1 + 2k_2 \end{pmatrix}$, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} k_1 + k_2 t \\ 2k_1 + 2k_2 t \end{pmatrix}$, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} k_1 + k_2 t \\ 2k_1 + 2k_2 t + 1 \end{pmatrix}$, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} k_1 + k_2 t \\ 2k_1 + 2k_2 t + k_2 \end{pmatrix}$, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

13. Wir betrachten ein System in der Ebene von der Form

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t) \ .$$

In welchem Fall ist der Ursprung ein stabiler Fixpunkt des Systems?

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Bitte wenden $\hookrightarrow$

14. Was ist die Steigung der Tangente in $x = 0$ an den Graphen von

$$f(x) = \sin(x^3)?$$

(a) 0.

(b) $\frac{1}{3}$.

(c) 1.

(d) 3.

15. Welche ist die Lösung $Y(t)$ des Anfangswertproblems

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} \ , \qquad Y(0) = 0 \ ,$$

für $-2 < t < 2$?

(a) $Y(t) = \arcsin \dfrac{t}{2}$.

(b) $Y(t) = 2 \arcsin \dfrac{t}{2}$.

(c) $Y(t) = \arcsin(2t)$.

(d) $Y(t) = \dfrac{1}{2} \arcsin(2t)$.

16. Welche der folgenden im Intervall $(-1, 1)$ stückweise definierten Funktionen ist **nicht** stetig?

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x^2-1}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sinh x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1-\cos x}, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\cosh x}, & x < 0 \\ x^2 + 3, & x \geq 0. \end{cases}$

17. Sei $g(y)$ die Umkehrfunktion von $f(x) = 2 + \ln\left(\frac{x}{3} + 1\right)$ für $x > -3$. Die Ableitung von g an der Stelle $y = f(0) = 2$ ist:

(a) $\dfrac{1}{3}$.

(b) $\dfrac{1}{2}$.

(c) 2.

(d) 3.

18. Was ist der Wertebereich der Funktion

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2$$

für x im Intervall $[-1, 1]$?

(a) $[-5, 0]$.

(b) $[-5, 1]$.

(c) $[-1, 0]$.

(d) $[-1, 5]$.

19. Das Taylorpolynom zweiter Ordnung um 1 der Funktion $\sin(\pi x)$ ist

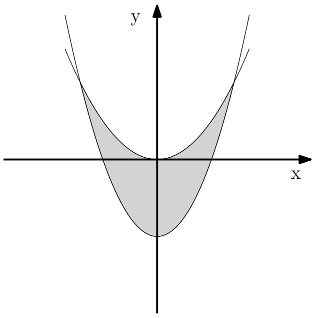
(a) $-\pi x$.

(b) $\pi - \pi x$.

(c) $-\pi x + \frac{\pi^2}{2} x^2$.

(d) $\pi - \pi x + \frac{\pi^2}{2} x^2$.

20. Was ist der Flächeninhalt F der schattierten Figur, die zwischen den Parabeln $y = 2x^2 - 1$ und $y = x^2$ liegt?



(a) $F = \dfrac{1}{6}$.

(b) $F = \dfrac{2}{3}$.

(c) $F = \dfrac{5}{6}$.

(d) $F = \dfrac{4}{3}$.

21. Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-3)(x-4)}\,dx$$

ist gleich

(a) $\ln \dfrac{1}{2}$.

(b) $\ln \dfrac{8}{9}$.

(c) $\ln \dfrac{9}{8}$.

(d) $\ln 2$.

22. Nach partieller Integration ist das Integral

$$\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

gleich

(a) $e + \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx.$

(b) $e - \int_0^1 2x^2e^{x^2}\,dx.$

(c) $e - 1 + \int_0^1 2x^2e^{x^2}\,dx.$

(d) $e - 1 - \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx.$

23. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = \int_0^x e^t\,dt\ , \qquad \text{mit } x \text{ beliebig reell,}$$

ist **falsch**?

(a) f ist stets positiv.

(b) f ist stets stetig.

(c) f ist stets differenzierbar.

(d) f ist stets monoton wachsend.

24. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist separierbar **aber** *nicht* linear?

(a) $e^y y' + e^{x+y}(\sin x)y = 0.$

(b) $e^x y' + e^{x+y}(\sin x)y = 0.$

(c) $e^y y' + \sin x + y = 0.$

(d) $e^x y' + \sin x + y = 0.$

25. Die Lösung $Y(x)$ des Anfangswertproblems

$$\frac{dY(x)}{dx} = 2xY(x) - 4x, \qquad Y(0) = 3,$$

erfüllt

(a) $Y(1) = 2 + e.$

(b) $Y(1) = 2 + \frac{1}{e}.$

(c) $Y(1) = 1 + 2e.$

(d) $Y(1) = 1 + \frac{2}{e}.$

26. Wir betrachten die Stabilität der Gleichgewichtspunkte der Gleichung

$$\frac{dY}{dx} = 3Y - Y^2 \ .$$

(a) $Y = 0$ und $Y = 3$ sind beide stabile Gleichgewichtspunkte.

(b) $Y = 0$ ist ein stabiler Gleichgewichtspunkt aber $Y = 3$ ist instabil.

(c) $Y = 0$ ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt aber $Y = 3$ ist stabil.

(d) $Y = 0$ und $Y = 3$ sind beide instabile Gleichgewichtspunkte.

27. Die Punktmenge $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |(1+i)z| = 2\}$ ist

(a) eine Gerade.

(b) die Vereinigung von zwei Geraden.

(c) ein Kreis vom Radius $\sqrt{2}$.

(d) ein Kreis vom Radius 2.

28. Die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda) = \lambda^4 - 1$ sind

(a) die doppelten Nullstellen 1 und -1.

(b) die doppelten Nullstellen i und $-i$.

(c) $1,\ e^{i\frac{\pi}{2}},\ -1,\ e^{i\frac{3\pi}{2}}.$

(d) $1,\ e^{i\frac{\pi}{4}},\ -1,\ e^{i\frac{3\pi}{4}}.$

29. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 9y = 3 \sin x \ .$$

Welcher der folgenden Lösungsansätze für eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung ist geeignet?

(a) $y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x$, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $y(x) = k_1 x \cos x + k_2 x \sin x$, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $y(x) = k_1 \cos(3x) + k_2 \sin(3x)$, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $y(x) = k_1 x \cos(3x) + k_2 x \sin(3x)$, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

30. Sei $y(x) = xe^{3x}$ eine Lösung einer bestimmten Differentialgleichung von der Form

$$y'' + by' + cy = 0 \ ,$$

wobei b und c reelle Konstanten sind. Welche der folgenden Funktionen ist sicher **keine** Lösung dieser Differentialgleichung?

(a) $y(x) = e^{3x}$.

(b) $y(x) = e^{3x+1}$.

(c) $y(x) = 3x + 1$.

(d) $y(x) = (3x + 1)e^{3x+1}$.