D-ERDW, D-HEST, D-USYS Mathematik I und II HS 2013 und FS 2014
Dr. Ana Cannas

Zwischenprüfung

19. Februar 2014 - 13:15-14:45 - 90 Minuten

[3701071212]

---

1. Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ist

(a) -14.

(b) -5.

(c) -25.

(d) 28.

2. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen für reelle $n \times n$-Matrizen A und B sowie alle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ **falsch**?

(a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(b) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

(c) $\det(A^T) = \det A$.

(d) $\det(AB) = \det B \det A$.

3. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat

(a) eine eindeutige Lösung.

(b) eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

(c) eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

(d) keine Lösung.

4. Gegeben sei das folgende Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -x_1 & + & 4x_2 & - & 7x_3 & - & x_4 & = & 0. \end{cases}$$

Die Lösungsmenge hat Dimension gleich

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) 3.

5. Sei A^{-1} die zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ inverse Matrix. Die Summe der Spalten von A^{-1} ist

(a) $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

6. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Jede invertierbare Matrix ist diagonalisierbar.

(b) Jede diagonalisierbare Matrix ist invertierbar.

(c) Die Eigenwerte einer invertierbaren Matrix sind alle nicht Null.

(d) Die Eigenwerte einer diagonalisierbaren Matrix sind alle nicht Null.

7. Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

8. Sei $z \in \mathbb{C}$. Stets reell ist

(a) $z - \bar{z}$.

(b) $\frac{z}{\bar{z}}$.

(c) z^2.

(d) $e^z e^{\bar{z}}$.

9. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z = \sqrt{3} - i$ und $w = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Welche Aussage über $\frac{z}{w}$ ist korrekt?

(a) $\left|\frac{z}{w}\right| = 4$ und $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{7\pi}{6}$.

(b) $\left|\frac{z}{w}\right| = 4$ und $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{2}$.

(c) $\left|\frac{z}{w}\right| = 1$ und $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{7\pi}{6}$.

(d) $\left|\frac{z}{w}\right| = 1$ und $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{2}$.

10. Die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda) = \lambda^3 + 8$ sind

(a) $-2,\ 2i,\ -2i$.

(b) $-2,\ \sqrt{2} + \sqrt{2}i,\ \sqrt{2} - \sqrt{2}i$.

(c) $2e^{i\frac{\pi}{3}},\ 2e^{i\frac{2\pi}{3}},\ -2$.

(d) $2e^{i\frac{\pi}{3}},\ 2e^{i\pi},\ 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

11. Sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) A hat Eigenwerte $3 \pm 4i$.

(b) A hat Eigenwerte $-3 \pm 4i$.

(c) A hat Eigenwerte $4 \pm 3i$.

(d) A hat Eigenwerte $-4 \pm 3i$.

12. Was ist der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x$?

(a) -1.

(b) 1.

(c) $\dfrac{\pi}{4}$.

(d) $-\dfrac{\pi}{4}$.

13. Welche der folgenden Funktionen ist im Intervall $]0,1[$ **nicht** streng monoton wachsend?

(a) $f(x) = \ln x + e^{x^2}$.

(b) $f(x) = |5x| - x^2$.

(c) $f(x) = \displaystyle\int_0^x (2-t) \, \mathrm{d}t$.

(d) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(\pi t) \, \mathrm{d}t$.

14. Die Umkehrfunktion $g(y)$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+2e^x}$ auf dem Intervall $(0,1)$ ist:

(a) $g(y) = \ln\left(1 + 2e^{-y}\right)$.

(b) $g(y) = \ln\left(\dfrac{1-y}{2y}\right)$.

(c) $g(y) = 1 + 2e^y$.

(d) $g(y) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{-y}$.

15. Welche der folgenden Identitäten ist **falsch**?

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x - 1} = 0.$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sin(x^2) + 1} = 0.$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\cos x - 1} = 0.$

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = 0.$

16. Das Taylorpolynom zweiter Ordnung um 0 der Hyperbelfunktion $\cosh x$ ist

(a) $1 + \frac{1}{2}x^2.$

(b) $1 + x^2.$

(c) $1 + 2x^2.$

(d) $2 + x^2.$

17. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion

$$f(x) = x^3 - x^2$$

im Intervall $[0, 1]$ ist richtig?

(a) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = \frac{1}{3}$ an.

(b) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = \frac{1}{3}$ an.

(c) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Minimum im Punkt $x = \frac{2}{3}$ an.

(d) f nimmt in $[0, 1]$ ihr globales Maximum im Punkt $x = \frac{2}{3}$ an.

18. Sei x_n eine Approximation von einer Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^2 - \alpha$$

wobei $\alpha > 0$. Was ist unter Anwendung des Newtonverfahrens die nächste Approximation x_{n+1}?

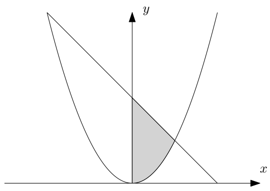
(a) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

(b) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

(c) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

(d) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n - \frac{\alpha}{x_n}\right)$.

19. Wie gross ist der Flächeninhalt F der Figur im ersten Quadrant, die zwischen der Parabel $y = x^2$ und der Geraden $y = 2 - x$ liegt?



(a) $F = \frac{7}{6}$.

(b) $F = \frac{4}{3}$.

(c) $F = \frac{5}{6}$.

(d) $F = \frac{10}{3}$.

20. Welche der folgenden Rechnungen ist **keine** korrekte Anwendung der partiellen Integration?

(a) $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \sin\varphi \cdot \cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = -\cos\varphi \cdot \cos\varphi + \int \cos\varphi \cdot \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi.$

(c) $\displaystyle\int 2x^3 e^{x^2} \,\mathrm{d}x = x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} \,\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1} \,\mathrm{d}x = x\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x.$

21. Welche ist eine korrekte Stammfunktion von

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+2x}?$$

(a) $\displaystyle\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|.$

(b) $\displaystyle\arctan(x) - \frac{2}{(1+2x)^2}.$

(c) $\displaystyle\operatorname{arsinh}(x) + \frac{1}{2}\ln|1+2x|.$

(d) $\displaystyle\operatorname{arsinh}(x) - \frac{2}{(1+2x)^2}.$

22. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ und $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergieren beide.

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ konvergiert, aber $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ divergiert.

(c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergiert, aber $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ divergiert.

(d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ und $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ divergieren beide.

23. Welche der folgenden Differentialgleichungen ist linear?

(a) $yy' + x^2 = 0.$

(b) $yy' + 2 = 0.$

(c) $y' + xy^2 + x = 0.$

(d) $y' + x^2y + x = 0.$

24. Die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = 3y\left(1 - \frac{y}{2}\right)$$

geht durch Trennung der Variablen und Partialbruchzerlegung über in

(a) $\int \left(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{y}\right) dy = \int 3\,dx + c$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

(b) $\int \left(\frac{2}{y-2} - \frac{2}{y}\right) dy = \int 3\,dx + c$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

(c) $\int \left(\frac{2}{2-y} - \frac{1}{y}\right) dy = \int 3\,dx + c$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

(d) $\int \left(\frac{1}{y-2} + \frac{2}{y}\right) dy = \int 3\,dx + c$ wobei $c \in \mathbb{R}$.

25. Die Differentialgleichung

$$y' = y + \sqrt{y-x} - x + 1$$

(a) ist linear, aber nicht separierbar.

(b) ist separierbar, aber nicht linear.

(c) wird nach der Substitution $u = y - x$ linear, aber nicht separierbar.

(d) wird nach der Substitution $u = y - x$ separierbar, aber nicht linear.

26. Die Lösung $Y(t)$ des Anfangswertproblems

$$\frac{dY(t)}{dt} = 2\,Y(t) - 10, \qquad Y(0) = 6,$$

erfüllt

(a) $Y(1) = e^2 + 5$.

(b) $Y(1) = 2$.

(c) $Y(1) = e^2 - 10$.

(d) $Y(1) = -8$.

27. Die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y'' + 16y = e^{3x}$$

ist von der Form

(a) $y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + \frac{1}{25}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x) + \frac{1}{5}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{25}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{5}e^{3x}$ wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

28. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^x \ .$$

Welcher der folgenden Lösungsansätze für eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung ist geeignet?

(a) $y(x) = ke^x$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

(b) $y(x) = kxe^x$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

(c) $y(x) = ke^{4x}$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

(d) $y(x) = kxe^{4x}$ wobei $k \in \mathbb{R}$.

29. Die Matrix A habe die Eigenwerte 0 und 4 mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Wie lautet die erste Komponente der allgemeinen Lösung von $\dot{\vec{x}}(t) = A\,\vec{x}(t)$?

(a) $x_1(t) = e^{c_1 t} + 2e^{4c_2 t}$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $x_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $x_1(t) = c_1 t + c_2 e^{4t}$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(d) $x_1(t) = c_1 + c_2 e^{4t}$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

30. Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP):

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

wobei die Eigenwerte der Koeffizientmatrix A dieses AWP gleich $3 \pm 30i$ sind. Welche der folgenden Aussagen über die Lösung $\vec{x}(t)$ dieses AWPs ist korrekt?

(a) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer grösser als 10.

(b) $|\vec{x}(t)|$ bleibt für hinreichend grosse t immer kleiner als $\frac{1}{10}$.

(c) $|\vec{x}(t)|$ bleibt stets konstant gleich $\sqrt{2}$.

(d) $|\vec{x}(t)|$ oszilliert zwischen Werten grösser als 10 und kleiner als $\frac{1}{10}$.