D-HEST,
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Mathematik III

HS 2015

Lösung 0

In der Vorlesung Mathematik III spielen Differentialgleichung eine zentrale Rolle. Wir werden deren Theorie, welche im FS15 nur in Teilen diskutiert wurde, vertiefen und ausbauen.

Zur Auffrischung bearbeiten Sie bitte folgende Fragen aus Mathematik II **online bis Dienstag, den 22.09.2015**.

Bitte wenden!

1. Trennen Sie die Variablen der Differentialgleichung $y' = \ln(x+1)y + \ln(x+1)$.

(a) $\frac{y'}{y} = \ln(x+1) + 1$.

(b) $yy' = \ln(x+1)$.

(c) $yy' = \ln(x+1)^2$.

$\surd$ (d) $\frac{y'}{y+1} = \ln(x+1)$.

(e) Das ist nicht möglich.

(f) Weiss ich nicht.

Die einzig korrekte Umformung ist:

$$y' = \ln(x+1)y + \ln(x+1) = (y+1)\ln(x+1) \Rightarrow \frac{y'}{y+1} = \ln(x+1).$$

Wegen $y' = \frac{dy}{dx}$ muss nun noch mit dx multipliziert werden.

Siehe nächstes Blatt!

2. Welche der folgenden Aussagen stimmen?

(a) Jede Differentialgleichung, welche durch Trennung der Variablen lösbar ist, muss eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung sein.

Nein. Zum Beispiel haben wir in der Vorlesung die logistische DGL mit Trennung der Variablen gelöst, diese ist aber nicht linear.

(b) Jede Differentialgleichung, welche durch Trennung der Variablen lösbar ist, muss eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung sein.

Nein. Zum Beispiel haben wir in der Vorlesung die logistische DGL mit Trennung der Variablen gelöst, diese ist aber nicht linear.

√ (c) Jede homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung lässt sich durch Trennung der Variablen lösen.

Richtig. Eine homogene lineare DGL 1. Ordnung hat die Form $y' = p(x)y$. Die Trennung der Variablen ist

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx.$$

(d) Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung lässt sich genau dann durch Trennung der Variablen lösen, wenn sie homogen ist.

Nein. Sei zum Beispiel $y' = p(x)y + p(x)$, d.h. $q(x) = p(x)$. Ausklammern gibt

$$y' = p(x)(y+1) \Longrightarrow \frac{dy}{y+1} = p(x)dx.$$

Vergleiche auch Frage 4 mit einem Beispiel.

(e) Keine stimmt.

(f) Weiss ich nicht.

Bitte wenden!

3. Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(x) = 3y(x) + \cos(x)$. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung sind richtig?

(a) Eine spezielle Lösung ist $y_p(x) = \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$.

√ (b) Eine spezielle Lösung ist $y_p(x) = -\frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$.

(c) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = Ke^{3x} + \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$, für $K \in \mathbb{R}$.

√ (d) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = Ke^{3x} - \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$, für $K \in \mathbb{R}$.

(e) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = Ke^{3x} - \frac{3}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x$, für $K \in \mathbb{R}$.

(f) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = Ke^{3x} + \frac{3}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x$, für $K \in \mathbb{R}$.

(g) Die allgemeine Lösung ist $y(x) = Ke^{3x} + \sin x$, für $K \in \mathbb{R}$.

(h) Keine.

(i) Weiss ich nicht.

Siehe nächstes Blatt!

Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet $y'(x) = 3y(x)$. Lösungen sind $y = 0$ oder $y_H(x) = Ke^{3x},\ K \in \mathbb{R}$, da $\int 3\,dx = 3x$.
Explizit lässt sich dies mit Trennung der Variablen nachrechnen:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3\,dx$$

$$\ln|y| = 3x + C,\ C \in \mathbb{R}$$
$$|y| = Ke^{3x},\ K = e^C > 0$$
$$y = Ke^{3x},\ K \in \mathbb{R},$$

da $y = 0$ auch eine Lösung ist. Also ist die allgemeine Lösung der homogene Differentialgleichung gleich $y_H(x) = Ke^{3x}$, $K \in \mathbb{R}$. Mit einer speziellen Lösung y_p der inhomogenen DGL ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$.

Einsetzen in die DGL zeigt, dass $y_p(x) = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$ eine spezielle Lösung ist, aber $y_p(x) = \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$ nicht. Insgesamt haben wir als allgemeine Lösung

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = Ke^{3x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x,$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!

4. Eine Population sei beschrieben durch die DGL

$$P' = \frac{1}{5}P - \frac{1}{5175}P^2.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, falls für die Anfangspopulation $P(0)$ gilt $0 < P(0) < 517$?

Hinweis: Es ist $5175 = 5 \cdot 1035 = 2 \cdot 5 \cdot 517.5$.

(a) Die Populationsgrösse wächst exponentiell.

√ (b) Die Population wächst ständig, hat aber nie mehr als 1035 Mitglieder.

(c) Die Population wächst zunächst bis sie 1035 Mitglieder hat, fällt aber anschliessend wieder.

√ (d) Ab der Populationsgrösse von 518 beginnt die Wachstumsgeschwindigkeit abzunehmen.

(e) Ab der Populationsgrösse von 518 wird die Wachstumsgeschwindigkeit grösser.

(f) Das lässt sich nicht entscheiden.

(g) Weiss ich nicht.

Siehe nächstes Blatt!

Ausklammern gibt

$$P' = \frac{P}{5}\left(1 - \frac{P}{1035}\right).$$

Für $P(t_0) = 1035$ ist $P'(t_0) = 0$, mithin kein Wachstum, und es ist $P'(t) > 0$ für $0 < P(t) < 1035$. Daher wächst die Population ständig, hat aber nie mehr als 1035 Mitglieder. Ferner gilt

$$\begin{aligned}(P')' &= \frac{1}{5}P' - \frac{2}{5175}PP' = \frac{P'}{5}\left(1 - \frac{2P}{1035}\right)\\ &= \frac{P}{25}\left(1 - \frac{P}{1035}\right)\left(1 - \frac{2P}{1035}\right),\end{aligned}$$

also beginnt die Wachstumsgeschwindigkeit bei einer Populationsgrösse von 518 abzunehmen.

Bitte wenden!

5. Für die Lösung $(x(t), y(t))$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + \dot{y}(t) &= 4\,x(t), \\ \dot{x}(t) - \dot{y}(t) &= 6\,y(t), \end{aligned}$$

welche die Anfangsbedingungen $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$ erfüllt, gilt

(a) $x(1) + y(1) = 2e^3$.

√ (b) $2x(1) + y(1) = 2e^3$.

(c) $x(1) + 2y(1) = 2e^3$.

(d) $x(1) + y(1) = e^3$.

(e) Weiss ich nicht.

Dieses System kann geschrieben werden als

$$\begin{array}{rcl} \dot{x} + \dot{y} &=& 4x \\ \dot{x} - \dot{y} &=& 6y \end{array} \iff \begin{array}{rcl} 2\dot{x} &=& 4x + 6y \\ 2\dot{y} &=& 4x - 6y \end{array} \iff \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& 2x + 3y \\ \dot{y} &=& 2x - 3y \end{array} \iff \dot{z} = Az = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} z,$$

wobei $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Wir berechnen die Eigenwerte λ_1 bzw. λ_2 Es gilt

$$0 = \det\left(A - \lambda I_2\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 4)\,(\lambda - 3)\,.$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 3$ und voneinander verschieden. Die Eigenvektoren seien $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ von A. Sie berechnen sich aus

$$(A - \lambda_1 I_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow b = -2a.$$

Siehe nächstes Blatt!

Damit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1. Analog berechnen wir

$$(A - \lambda_2 I_2) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow c = 3d.$$

Damit ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_2. Da die EW voneinander verschieden sind, erhalten wir zwei linear unabhängige Lösungen von $\dot{z} = Az$

$$z_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} \quad \text{und} \quad z_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Es folgt, dass die allgemeine Lösung von $\dot{z} = Az$ gegeben ist durch

$$z(t) = \alpha z_1(t) + \beta z_2(t) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4t} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} \alpha e^{-4t} + 3\beta e^{3t} \\ -2\alpha e^{-4t} + \beta e^{3t} \end{pmatrix}$$

oder, da $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

$$x(t) = \alpha e^{-4t} + 3\beta e^{3t} \quad \text{und} \quad y(t) = -2\alpha e^{-4t} + \beta e^{3t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Mit den Anfangsbedingungen bestimmen wir die Konstanten α und β

$$\begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 0 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{rcl} 1 & = & \alpha + 3\beta \\ 0 & = & -2\alpha + \beta \end{array}.$$

Es folgt, dass $\alpha = \frac{1}{7}$ und $\beta = \frac{2}{7}$. Also

$$x(t) = \frac{1}{7} e^{-4t} + \frac{6}{7} e^{3t} \quad \text{und} \quad y(t) = -\frac{2}{7} e^{-4t} + \frac{2}{7} e^{3t}.$$

Mit Einsetzen folgt die richtige Antwort $2x(1) + y(1) = 2e^3$.

6. Das erste neue Thema werden Fourierreihen sein. Hier eine Aufgabe zum Einstieg.

a) Berechnen Sie folgende Integrale

- $\int_0^{2\pi} \sin(3x)\sin(x)dx$
- $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx$
- $\int_0^{2\pi} \sin^2(3x)dx$
- $\int_0^{2\pi} \sin^4(x)dx$

Hinweis: Benutzen Sie folgende Formeln

$$\begin{aligned} \sin(mx)\sin(nx) &= \frac{1}{2}\cos((m-n)x) - \frac{1}{2}\cos((m+n)x) \quad \text{für ganze Zahlen } m,n \\ \sin^2(x) &= 1-\cos^2(x) \\ \sin(x)\cos(x) &= \frac{1}{2}\sin(2x). \end{aligned}$$

b) Es sei bekannt, dass sich $\sin^3(x)$ als Linearkombination von $\sin(x)$ und $\sin(3x)$ schreiben lässt, dass heisst es gibt $r, s \in \mathbb{R}$, sodass

$$\sin^3(x) = r\sin(x) + s\sin(3x) \tag{1}$$

gilt. Multiplizieren Sie die Gleichung (1) einmal mit $\sin(x)$ und einmal mit $\sin(3x)$ und integrieren Sie beide Male über das Interval $[0, 2\pi]$ um die Koeffizienten r und s zu bestimmen. Benutzen Sie für die Berechnungen die Resultate aus a) und

$$\int_0^{2\pi} \sin^3(x)\sin(3x)dx = -\frac{1}{4}\pi.$$

a) Mithilfe der Identitäten aus dem Hinweis gilt:

- $\int_0^{2\pi} \sin(3x)\sin(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\cos(4x)dx = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{8}\sin(4x)|_0^{2\pi} = 0.$
- $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos(0) - \frac{1}{2}\cos(2x)dx = \pi - 0 = \pi.$
- $\int_0^{2\pi} \sin^2(3x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos(0) - \frac{1}{2}\cos(6x)dx = \pi - 0 = \pi.$
- $\int_0^{2\pi} \sin^4(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)(1-\cos^2(x))dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) - \sin^2(x)\cos^2(x)dx$
  $= \int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx - \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi.$

Siehe nächstes Blatt!

b) Multiplikation mit $\sin(x)$ und Integral über $[0, 2\pi]$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^4(x)dx &= \int_0^{2\pi} r\sin^2(x) + s\sin(3x)\sin(x)dx \\ \frac{3}{4}\pi &= r\pi. \end{aligned}$$

Also gilt $r = \frac{3}{4}$. Multiplikation mit $\sin(x)$ und Integral über $[0, 2\pi]$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^3(x)\sin(3x)dx &= \int_0^{2\pi} r\sin(x)\sin(3x) + s\sin^2(3x)dx \\ -\frac{1}{4}\pi &= s\pi. \end{aligned}$$

Also ist $s = -\frac{1}{4}$.