D-HEST,
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Mathematik III

HS 2015

Lösung 1

Das erste Kapitel der Vorlesung behandelt die Theorie der Fourier-Reihen.

Bearbeiten Sie bitte folgende Fragen **online bis Dienstag, den 29.09.2015**.

Bitte wenden!

1. Für jede <u>gerade</u> 2π-periodische Funktion f mit Fourier-Koeffizienten a_n, b_n gilt

(a) $a_n = 0$

(b) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx$

√ (c) $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx$

√ (d) $b_n = 0$

(e) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx$

(f) $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx$

(g) Nichts davon.

(h) Weiss ich nicht.

Sei f gerade, d.h. $f(-x) = f(x)$. Setze in die Formel für den Fourier-Koeffizienten b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

die Substitution $y = -x$ ein:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(-y)\sin(n(-y))\,(-dy) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ny)\,dy = -b_n$$

also $2b_n = 0$ und $b_n = 0$.

Überlegen wir uns die Antwort aufgrund der Symmetrien von (un-)geraden Funktionen: Es gilt

Siehe nächstes Blatt!

- sin ist eine ungerade, cos eine gerade Funktion.
- Das Produkt zweier (un-)gerader Funktionen ist eine gerade Funktionen.
- Das Produkt einer geraden und einer ungeraden ist eine ungerade Funktion.

Ist also f gerade, ist $f \cdot \sin$ ungerade, also der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung, daher für jedes a

$$\int_{-a}^{a} f(x) \sin(nx) \, dx = 0.$$

Analog ist $f \cdot \cos$ gerade, der Graph symmetrisch zur y-Achse und für jedes a

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cos(nx) \, dx = 2 \int_{0}^{a} f(x) \cos(nx) \, dx$$

und $a_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$.

Bitte wenden!

2. Für jede <u>ungerade</u> 2π-periodische Funktion f mit Fourier-Koeffizienten a_n, b_n gilt

√ (a) $a_n = 0$

(b) $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx$

(c) $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx$

(d) $b_n = 0$

(e) $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx$

√ (f) $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx$

(g) Nichts davon.

(h) Weiss ich nicht.

Siehe Erläuterungen in Frage 1 mit vertauschten Rollen: Es sind $f \cdot \cos$ ungerade und $f \cdot \sin$ gerade.

Siehe nächstes Blatt!

3. Seien $f, g \in C^1([-1,1])$ mit Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

Angenommen, der Graph von f und der Graph von g schneiden sich senkrecht, d.h. die Tangenten in einem gemeinsamen Punkt stehen senkrecht aufeinander.

Dann sind f und g orthogonal bezüglich dieses Skalarprodukts.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

(c) Weiss ich nicht.

Seien zum Beispiel $f(x) = x$ und $g(x) = -x$. Deren Graphen schneiden sich senkrecht im Ursprung, aber es gilt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-x^2)\,dx = \frac{-1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \neq 0,$$

also sind f und g nicht orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Bitte wenden!

4. Ist f eine ungerade Funktion und g eine gerade Funktion, so sind f und g orthogonal bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 3.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

(c) Weiss ich nicht.

Eine ungerade Funktion f erfüllt die Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$ und eine gerade Funktion g die Eigenschaft $g(-x) = g(x)$. Somit liefert die Substitution $y = -x$ die folgende Beziehung für das Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{1}^{-1} f(-y)g(-y)\,(-dy) = \int_{-1}^{1} f(-y)g(-y)\,dy \\ &= \int_{-1}^{1} (-f(y))g(y)\,dy = -\int_{-1}^{1} f(y)g(y)\,dy = -\langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt $2\langle f, g \rangle = 0$ und $\langle f, g \rangle = 0$, die ungerade Funktion f und die gerade Funktion g sind also orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Alternativ, wissen wir wieder allgemein, dass $f \cdot g$ eine ungerade Funktion ist, damit gilt für jedes a

$$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

5. Berechnen Sie folgende Integrale, welche typische Beispiele in der Theorie der Fourier-Reihen sind.

a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(nx)dx$ für $n = 1, 2, 3$ und für beliebiges $n \neq 0$.

$$\int_0^\pi \sin(nx)dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{\cos(0) - \cos(n\pi)}{n} = \frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases} 2/n & \text{für } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Für $n = 1, 2, 3$ erhalten wir bzw. $2, 0, \frac{2}{3}$.

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi x\sin(nx)dx, \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$

Mittels partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^\pi x\sin(nx)dx &= \left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^\pi + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^\pi \cos(nx)dx \\ &= \frac{-\pi\cos(n\pi) - \pi\cos(-n\pi)}{n} + \frac{1}{n^2}\left[\sin(nx)\right]_{-\pi}^\pi \\ &= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n + 0 = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

da $\cos(x)$ eine gerade Funktion ist und $\sin(n\pi) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos(nx)\sin(mx)dx, \quad$ wobei $n, m \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Verwenden Sie $\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$.

$$\int_{-\pi}^\pi \cos(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)dx = 0,$$

weil $\sin(x)$ eine ungerade Funktion ist.

Bitte wenden!

6. Koeffizienten der Fourier-Reihe

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier-Reihe auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

zu den folgenden Funktionen f:

- $f(x) = |x|$
- $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x \in [-\pi, 0[\\ 1 & \text{für} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$
- $f(x) = \sin^2(x)$

Für die gesuchten Koeffizienten gilt:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Mit $f(x) = |x|$ ergibt sich also:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx \overset{\text{Symm.}}{=} \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_{0}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx)\, dx \\ &\overset{\text{Symm.}}{=} \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \underbrace{\left[\frac{x}{n} \sin(nx)\right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_{0}^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx)\, dx \right\} \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(nx)\, dx = -\frac{2}{n\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx)\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$= \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos(nx)\right]_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi}\left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - 1\right)$$

$$= \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi} & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{, falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Für eine gerade Funktion, hier $x \mapsto |x|$, sind alle $b_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin(nx)\, dx = 0$$

Als Fourier-Reihe für $f(x) = |x|$ auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ haben wir also gefunden:

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi} & \text{, } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{, } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Mit $n = 2k+1$ können wir dies schreiben als

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{(2k+1)^2\pi} \cos((2k+1)x)\,.$$

Die Rechteckschwingung ist eine ungerade Funktion, somit ist a_0 gleich Null sowie die Koeffizienten a_n von $\cos(nx)$. Nun berechnen wir b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\sin(nx)dx + \int_0^\pi 1\cdot\sin(nx)dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 4/(n\pi) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Eine trigonometrische Identität ist $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$. Also $a_0 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ und die anderen Koeffizienten verschwinden (da die Fourier-Reihe einer Funktion eindeutig bestimmt ist, folgt dies durch Koeffizientenvergleich).

b) Plotten Sie mit den gefundenen Koeffizienten die trigonometrischen Polynome

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{(N-1)/2} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

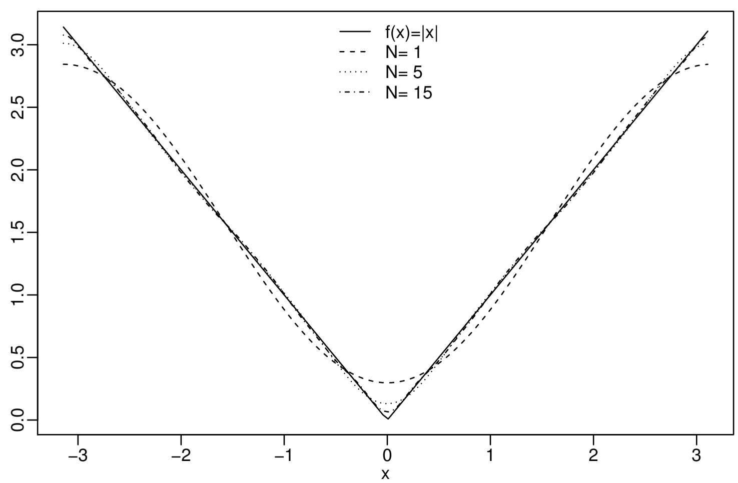
Bitte wenden!

für $f(x) = |x|$ mit $N = 1$, $N = 5$ und $N = 15$. Was beobachten Sie?

Wir plotten folgende Summen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$:

- $\frac{\pi}{2} + \frac{-4}{\pi} \cos(x) \quad (N = 1)$
- $\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{2} \frac{4}{(2k+1)^2 \pi} \cos((2k+1)x) \quad (N = 5)$
- $\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{7} \frac{4}{(2k+1)^2 \pi} \cos((2k+1)x) \quad (N = 15)$

Wir sehen, dass die trigonometrischen Polynome für $N \to \infty$ die Betragsfunk-



tion immer besser approximieren.

Siehe nächstes Blatt!

7. Bestimmen Sie die trigonometrischen Koeffizienten a_n, b_n der Fourier-Reihe mit Periode T zu den folgenden Funktionen f, g, h:

- $f(x) = \cos(x/2), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad T = 2\pi$

  Version I: Es ist $b_n = 0$, da $x \mapsto \cos(x/2)$ gerade ist. Für a_n verwenden wir

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

  und rechnen

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)\cos(nx)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n + \tfrac{1}{2})x) + \cos((n - \tfrac{1}{2})x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n + \frac{1}{2}}\sin((n + \tfrac{1}{2})x) + \frac{1}{n - \frac{1}{2}}\sin((n - \tfrac{1}{2})x)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n + \frac{1}{2}}\sin((n + \tfrac{1}{2})\pi) + \frac{2}{n - \frac{1}{2}}\sin((n - \tfrac{1}{2})\pi)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n + \frac{1}{2}} - \frac{(-1)^n}{n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{4(-1)^n}{1 - 4n^2}.\end{aligned}$$

  Also $\boxed{a_n = \frac{4(-1)^n}{(1 - 4n^2)\pi}}$.

  Version II:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)e^{-inx}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-ix/2} + e^{ix/2})e^{-inx}dz \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-i(n + \frac{1}{2})}e^{-ix/2}e^{-inx} + \frac{1}{-i(n - \frac{1}{2})}e^{ix/2}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{-i - i}{-i(n + \frac{1}{2})} + \frac{i - (-i)}{-i(n - \frac{1}{2})}\right) \\ &= (-1)^n\left(\frac{1}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n - \frac{1}{2}}\right) = \frac{4(-1)^n}{1 - 4n^2}.\end{aligned}$$

  Also $\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi}\frac{4(-1)^n}{1 - 4n^2} = \frac{2(-1)^n}{(1 - 4n^2)\pi}}$. Dann berechnet sich a_n mittels folgender Formeln:

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}$$

Bitte wenden!

Da hier $c_n = c_{-n}$ gilt $a_n = 2c_n = \frac{4(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}$ und $b_n = i(c_n - c_{-n}) = 0$.

Version III: $c_n = \dfrac{1}{2\pi} \cdot I$, wobei

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2) e^{-inx} dx \\ &= \left[2\sin(x/2)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2in \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x/2)e^{-inx} dx \\ &= 2((-1)^n + (-1)^n) + \left[-4in\cos(x/2)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - 4i^2n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)e^{-inx} dx \end{aligned}$$

$= 4(-1)^n + 4n^2 I$

da $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(-\pi/2) = -1$, $\cos(\pm\pi/2) = 0$, $e^{-in\pi} = (-1)^n$ und $i^2 = -1$.

Also $I = \dfrac{4(-1)^n}{1-4n^2}$ und wieder $\boxed{c_n = \dfrac{2(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}}$.

- $g(x) = 1 - e^{-x/2}, \quad x \in [0, 2[, \quad T = 2$

  Die Fourier-Reihe als Projektion ist linear, das heisst, $FR(g_1 + g_2) = FR(g_1) + FR(g_2)$. Daher berechnen wir separat für $g_1(x) = 1$ und $g_2(x) = -e^{-x/2}$. $FR(g_1) = 1e^0$, also $c_0^{(1)} = 1$. Um die Koeffizienten von $FR(g_2)$ zu bestimmen, berechnen wir

  $$c_n^{(2)} = \frac{1}{T} \int_0^T g_2(x) e^{-\frac{2i\pi}{T}nx} dx.$$

  Für $T = 2$ also

  $$c_n^{(2)} = \frac{1}{2} \int_0^2 (-e^{-x/2}) e^{-i\pi nx} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{1 + 2i\pi n} e^{-(1+2i\pi n)x/2} \right]_0^2 = \frac{e^{-1} - 1}{1 + 2i\pi n},$$

  weil $e^{-2i\pi n} = 1$. Mit $c_n = c_n^{(1)} + c_n^{(2)}$ erhalten wir $\boxed{c_n = \dfrac{e^{-1} - 1}{1 + 2i\pi n} \text{ und } c_0 = e^{-1}}$.

  Berechne a_n, b_n wieder mit

  $$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

- $h(x) = 1 - e^{-2\pi x}, \quad x \in [0, 1[, \quad T = 1$

  Analog zu oben, $T = 1$, $c_0^{(1)} = 1$ und

  $$c_n^{(2)} = \int_0^1 (-e^{-2\pi x}) e^{-2i\pi nx} dx = \frac{1}{2\pi(1 + in)} \left[e^{-2\pi(1+in)x}\right]_0^1 = \frac{e^{-2\pi} - 1}{2\pi(1 + in)},$$

  also $\boxed{c_n = \dfrac{e^{-2\pi} - 1}{2\pi(1 + in)} \text{ und } c_0 = \dfrac{e^{-2\pi} - 1}{2\pi} + 1}$.