D-HEST, Prof. Dr. E. W. Farkas R. Bourquin und M. Sprecher Mathematik III HS 2015

Lösung 10

1. Laplace-Transformation einer periodischer Funktion

Sei f die 1-periodische Funktion mit $f(t) = 1 - t$ für $0 \leq t < 1$. Berechnen Sie die Laplace-Transformation von f.

Lösung Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-ts} dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 (1-t) e^{-ts} dt \\
&= \frac{1}{1-e^{-s}} \left((1-t) \frac{-1}{s} e^{-ts} |_0^1 - \int_0^1 (-1) \frac{-1}{s} e^{-ts} dt \right) \\
&= \frac{1}{1-e^{-s}} \left(\frac{1}{s} - \frac{1-e^{-s}}{s^2} \right) \\
&= \frac{s + e^{-s} - 1}{s^2(1-e^{-s})}.
\end{aligned}$$

Erweitern man den Bruch noch mit e^s erhält man

$$\frac{e^s - 1 - se^s}{s^2(1-e^s)}.$$

Bitte wenden!

2. Rücktransformation

Berechnen Sie $\mathcal{L}^{-1}(F)$ für folgende Funktionen F

a) $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$

Lösung Es gilt $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2}) = t$ und $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+1}) = \sin(t)$. Mit dem Faltungssatz folgt daher

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right) = t*\sin(t) = \int_0^t u\sin(t-u)du = u\cos(t-u)|_0^t - \int_0^t \cos(t-u)du = t-\sin(t).$$

b) $\frac{3s^2-3s+1}{s^3-2s^2+s}$

Lösung Der Nenner kann faktorisiert werden, es gilt $s^3-2s^2+s = s(s-1)^2$. Wir machen den Ansatz

$$\frac{3s^2-3s+1}{s^3-2s^2+s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

für die Partialbruchzerlegung und erhalten die Gleichung

$$3s^2-3s+1 = A(s^2-2s+1) + B(s^2-s) + Cs = (A+B)s^2 - (2A+B-C)s + A.$$

Es folgt der Reihe nach $A = 1$, $B = 2$ und $C = 1$. Wegen Linearität der Laplace-Transformation gilt nun

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s^2-3s+1}{s^3-2s^2+s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) = 1+2e^t+te^t.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Differentialgleichung 1. Ordnung

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + y = (1+t)e^t,\ y(0) = \frac{1}{4}$$

mittels Laplace-Transformation.

Lösung Sei Y die Laplace-Transformation von y. Durch Laplace-Transformation der Gleichung erhält man mit dem Ableitungssatz

$$(sY(s) - y(0)) + Y(s) = \frac{s}{(s-1)^2}.$$

Auflösen nach $Y(s)$ und einsetzen von $y(0) = \frac{1}{4}$ ergibt

$$Y(s) = \frac{\frac{s}{(s-1)^2} + \frac{1}{4}}{(s+1)} = \frac{4s + (s-1)^2}{4(s-1)^2(s+1)} = \frac{s^2+2s+1}{4(s-1)^2(s+1)} = \frac{(s+1)^2}{4(s-1)^2(s+1)} = \frac{s+1}{4(s-1)^2}.$$

Wegen der Linearität der Laplace-Transformation gilt also

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{1}{4}\left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s-1)^2}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)\right) = \frac{1}{4}\left((1+t)e^t + te^t\right) = \frac{1}{4}(1+2t)e^t.$$

Bitte wenden!

4. Differentialgleichung eines Pendels

Wir betrachten die Klasse von Differentialgleichungen:

$$my''(t) + fy(t) = K(t)$$

mit Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ und $y'(0) = v_0$, deren Lösungen $y(t)$, $t \geq 0$, die Bewegung eines Federpendels der Masse $m > 0$ beschreiben, das an einer Feder der Federkonstante $f > 0$ hängt und der äusseren Kraft $K(t)$ ausgesetzt ist. Hier beschreibt y_0 die Anfangsauslenkung und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Pendels. Es ist zweckmässig, die Grösse $\omega_0 := \sqrt{\frac{f}{m}}$ einzuführen, die so genannte *Eigenfrequenz* des Pendels. Bestimmen Sie $y(t)$ in folgenden Fällen mittels Laplace-Transformation:

a) Keine äussere Krafteinwirkung: $K(t) \equiv 0$. (Siehe auch Serie 8 Aufgabe 4)

Laplace-Transformation der Differentialgleichung ergibt:

$$m\mathcal{L}\{y''\}(s) + f\mathcal{L}\{y\}(s) = 0$$

wobei wir auch die Linearität von $\mathcal{L}$ verwendet haben. Mit dem Transformationssatz für die Ableitung erhalten wir hieraus:

$$m\left(s^2\mathcal{L}\{y\}(s) - sy_0 - v_0\right) + f\mathcal{L}\{y\}(s) = 0$$

und durch Auflösen nach $\mathcal{L}\{y\}(s)$ ergibt sich:

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = y_0\frac{s}{s^2+\omega_0^2} + v_0\frac{1}{s^2+\omega_0^2}$$

wobei wir $\omega_0^2 = \frac{f}{m}$ gesetzt haben. Rücktransformation in den Originalbereich ergibt nun:

$$y(t) = y_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right\} + v_0\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega_0^2}\right\} = y_0\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,.$$

Wir lesen ab, dass das Federpendel in Abwesenheit jeglicher äusseren Krafteinwirkung eine sinusförmige Bewegung mit der (Eigen-)Frequenz ω_0 beschreibt.

b) Periodische Anregung $K(t) = K\cos(\omega t)$, für fixe $K, \omega > 0$, und mit $y_0 = v_0 = 0$. Unterscheiden Sie hierbei die Fälle $\omega \neq \omega_0$ und $\omega = \omega_0$ (Resonanzfall).

Ähnlich wie in Teilaufgabe a) erhält man wegen $y_0 = v_0 = 0$ durch Anwendung des Ableitungssatzes:

$$s^2\mathcal{L}\{y\}(s) + \omega_0^2\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{m}\mathcal{L}\left\{K(t)\right\}(s)$$

Siehe nächstes Blatt!

und damit:

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{m(s^2+\omega_0^2)}\mathcal{L}\left\{K(t)\right\}(s)\,.$$

Da $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ folgt, dass:

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{K}{m}\frac{s}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)}\,.$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung für die rechte Seite durch (alternativ kann man auch hier den Faltungssatz verwenden). Sei zunächst $\omega \neq \omega_0$. Mit dem üblichen Ansatz:

$$\frac{s}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)} = \frac{A+Bs}{s^2+\omega^2} + \frac{C+Ds}{s^2+\omega_0^2}$$

für fixe $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ erhalten wir nach Multiplikation auf beiden Seiten mit $(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)$ die Bedingung:

$$\begin{aligned} s &= (A+Bs)(s^2+\omega_0^2) + (C+Ds)(s^2+\omega^2) \\ &= (A\omega_0^2 + C\omega^2) + s(B\omega_0^2 + D\omega^2) + s^2(A+C) + s^3(B+D) \end{aligned}$$

wobei wir in der 2. Zeile die rechte Seite ausmultipliziert und nach Potenzen von s geordnet haben. Koeffizientenvergleich (in s) ergibt nun:

$$\begin{aligned} A\omega_0^2 + C\omega^2 &= 0 \\ B\omega_0^2 + D\omega^2 &= 1 \\ A + C &= 0 \\ B + D &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung und der Tatsache, dass $\omega \neq \omega_0$ schliesst man, dass $A = C = 0$ sein muss. Andererseits ergeben die anderen beiden Gleichungen, dass:

$$B = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad D = -B = -\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\,.$$

Insgesamt haben wir also:

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{K}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2} - \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right),$$

und Rücktransformation ergibt:

$$y(t) = \frac{K}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right),$$

Bitte wenden!

also eine Superposition zweier harmonischer Schwingungen, jeweils mit der Eigenfrequenz ω_0 des Pendels und der Frequenz ω der Anregung.

Für den Fall $\omega = \omega_0$ erhalten wir stattdessen, dass:

$$y(t) = \frac{K}{m}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+\omega_0^2)^2}\right\} = \frac{K}{m}\frac{t\sin(\omega_0 t)}{2\omega_0}\,.$$

Dies ist eine Schwingung, deren Amplitude linear mit der Zeit t wächst. Insbesondere gilt für die Auslenkung $y(t) \to \infty$ für $t \to \infty$. Weil die äussere Kraft genau die gleiche Frequenz hat wie die Eigenfrequenz des Pendels ($\omega = \omega_0$), überlagern sich beide Effekte konstruktiv. Man spricht in diesem Zusammenhang von *Resonanz*.

c) Sei $K, \tau > 0$ und:

$$K(t) = \begin{cases} K & \text{für} \quad t \leq \tau \\ 0 & \text{für} \quad t > \tau \end{cases}$$

mit $y_0 = v_0 = 0$ eine konstante äussere Anregung der Dauer τ.

Es gilt weiterhin:

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{m(s^2+\omega_0^2)}\mathcal{L}\left\{K(t)\right\}(s)\,.$$

da die Annahmen $y_0 = v_0 = 0$ auch hier zutreffen. Man berechnet direkt:

$$\mathcal{L}\{K(t)\}(s) = \int_0^\tau K e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{K}{s}(1-e^{-s\tau})\,.$$

Damit gilt nun:

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{K}{m}(1-e^{-s\tau})\frac{1}{s(s^2+\omega_0^2)} = \frac{K}{m\omega_0^2}(1-e^{-s\tau})\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right)$$

wobei der letzte Schritt mittels einer einfachen Partialbruchzerlegung folgt. Wir erinnern uns, dass $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$ und $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2+\omega_0^2)\} = \cos(\omega_0 t)$ Aus der Linearität und mit dem Verschiebungssatz nach rechts ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{K}{m\omega_0^2}\mathcal{L}^{-1}\left\{(1-e^{-s\tau})\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right)\right\}(t) \\ &= \frac{K}{m\omega_0^2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s\tau}}{s}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-s\tau}}{s^2+\omega_0^2}\right\}(t)\right) \\ &= \frac{K}{m\omega_0^2}\left(1 - \cos(\omega_0 t) - \sigma(t-\tau) + \cos(\omega_0(t-\tau))\sigma(t-\tau)\right) \end{aligned}$$

wobei $\sigma(r) = 1$ für $r \geq 0$ und $\sigma(r) = 0$ für $r < 0$. Da $1 - \cos(\omega_0 t) = 2\sin^2\left(\omega_0 \frac{t}{2}\right)$, lässt sich dies noch etwas vereinfachen zu:

$$y(t) = \frac{K}{m\omega_0^2}\left(\sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\omega_0(t-\tau)}{2}\right)\sigma(t-\tau)\right)\,.$$