Lösung 11

1. Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen nach x und nach y von folgenden Ausdrücken

a) $\sin(x)y$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin(x)y = \cos(x)y,\ \frac{\partial}{\partial y}\sin(x)y = \sin(x).$$

b) $x^2y^3 + x$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^3 + x\right) = 2xy^3 + 1,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y^3 + x\right) = 3x^2y^2.$$

c) xe^{x+y}

$$\frac{\partial}{\partial x}xe^{x+y} = (x+1)e^{x+y},\ \frac{\partial}{\partial y}xe^{x+y} = xe^{x+y}.$$

d) $\ln(xy)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln(xy) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x},\ \frac{\partial}{\partial y}\ln(xy) = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}.$$

e) $\frac{x^2+y^2}{x+y}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2+y^2}{x+y} &= \frac{2x(x+y)-(x^2+y^2)}{(x+y)^2} = \frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2},\\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{x^2+y^2}{x+y} &= \frac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

2. Wärmeleitung im geschlossenen Draht

Betrachten Sie wie in der Vorlesung einen geschlossenen Draht der Länge L. Die Temperatur am Anfang sei gegeben durch

$$u(x,0) = u_0(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, \frac{L}{2}] \\ L - x & \text{für } x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}.$$

Da der Draht geschlossen ist gilt zudem $u(x+L,t) = u(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$.

a) Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

für $D = 10^{-2}$ und $L = 2$.

Lösung: Wie bereits in der Vorlesung gesehen ist mit beliebigen Koeffizienten A_n und B_n die Funktion

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos(\omega_n x) + B_n \sin(\omega_n x)\right) e^{-D\omega_n^2 t}$$

mit $\omega_n = \frac{2\pi n}{L}$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Wir müssen nun die Koeffizienten A_n und B_n so wählen, dass die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\omega_n x) + B_n \sin(\omega_n x) = u_0(x)$$

erfüllt ist. Da die Periodische Fortsetzung von u_0 gerade ist erhalten wir $B_n = 0$ für alle $n \geq 0$. Da u_0 und $\cos(\Omega_n x)$ symmetrisch sind bezüglich der $x = L/2$ Achse gilt

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos(\omega_n x) dx = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} x \cos(\omega_n x) dx.$$

Mittels partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{4}{L} \int_0^{L/2} x \cos(\omega_n x) dx \\ &= \frac{4}{\omega_n L} \left(x \sin(\omega_n x)|_0^{L/2} - \int_0^{L/2} \sin(\omega_n x) \right) \\ &= \frac{4}{\omega_n^2 L} (\cos(\omega_n L/2) - 1) \\ &= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{8}{\omega_n^2 L} & n \text{ ungerade} \end{cases}, \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

für $n > 0$. Zudem ist

$$A_0 = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} x dx = \frac{2}{L}\frac{1}{2}(L/2)^2 = \frac{L}{4}.$$

Die Lösung lautet also

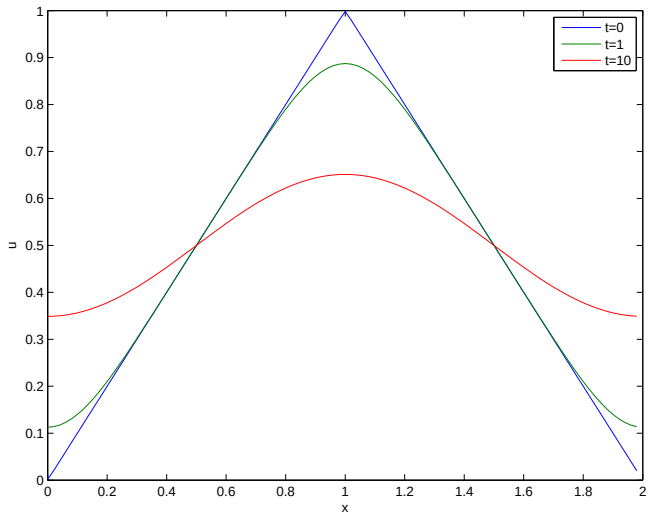
$$u(x,t) = \frac{L}{4} - \sum_{n \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{8}{\omega_n^2 L}\cos(\omega_n x)e^{-D\omega_n^2 t}.$$

b) Plotten Sie die Lösung für die Zeitpunkte $t = 0, 1$ und 10.

```
%Laenge des Drahts
L=2;

%Konstante in Waermeleitungsgleichung
D=10^(-2);

%Kreisfrequenz
omega0=2*pi/L;

%Anzahl Fourierkoeffizienten
NF=10^2;

%Zeitpunkte
t=[0 1 10];

%Anzahl Gitterpunkte
N=10^2;

%Gitterpunkte
x=linspace(0,L*(1-1/N),N);

%Variable fuer Loesungen
y=zeros(3,N);

for i=1:3
    %Loesung berechnen
    y(i,:)=L/4*ones(size(x));
    for j=1:2:NF
        omegaj=omega0*j;
        y(i,:)=y(i,:)-8/omegaj^2/L*cos(omegaj*x)*exp(-D*omegaj^2*t(i));
    end
end
```

Bitte wenden!

```
%Loesungen plotten
plot(x,y(1,:),x,y(2,:),x,y(3,:))
xlabel('x');
ylabel('u');
legend(['t=' num2str(t(1))],['t=' num2str(t(2))],['t=' num2str(t(3))])
print('-dpdf','exact.pdf');
```



c) Zusatz (freiwillig) Wir lösen nun die Wärmeleitungsgleichung numerisch. Dazu wählen wir N gleichmässig verteilte Punkte $x_0 = 0, \ldots, x_{N-1}$ auf dem Draht. Der Abstand von einem Punkt zum nächsten beträgt dann $dx = \frac{L}{N}$. Zudem wählen wir eine Zeitschrittweite $dt \ll 1$ und betrachten die Zeitpunkte $t_0 = 0, t_1 = dt$, $t_2 = 2dt, \ldots, t_j = jdt$. Die partiellen Ableitungen der partiellen Differentialglei-

Siehe nächstes Blatt!

chung approximieren wir nun durch Differenzenquotienten. Es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j + dt) - u(x_i, t_j)}{dt} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_j, t_j)}{dt}.$$

Mehrmaliges approximieren durch Differentenquotienten ergibt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i + dx, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i - dx, t_j)}{dx^2} = \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{dx^2},$$

wobei wir $x_N = x_0$ und $x_{-1} = x_{N-1}$ setzen. Aus der Wärmeleitungsgleichung folgt nun

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_j, t_j)}{dt} \approx D\frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{dx^2}. \tag{1}$$

Auflösen nach $u(x_i, t_{j+1})$ ergibt

$$u(x_i, t_{j+1}) \approx u(x_i, t_j) + D\frac{dt}{dx^2}(u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)). \tag{2}$$

Kennt man also (approximativ) die Temperaturen an den Positionen x_{i-1}, x_i, x_{i+1} zum Zeitpunkt t_j kann man mit (2) eine Approximation für die Temperatur an der Stelle x_i zum späteren Zeitpunkt t_{j+1} berechnen. Das entsprechende finite Differenzen-Verfahren berechnet rekursiv Approximationen $u_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$ indem wir das '$\approx$' in (2) durch ein '$=$' ersetzen und lautet

$$u_{i,0} = u_0(x_i), \quad u_{i,j+1} = u_{i,j} + D\frac{dt}{dx^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}).$$

Implementieren Sie dieses finite Differenzen-Verfahren mit $N = 10^2$ und $dt = 10^{-2}$ und vergleichen die Lösung zum Zeitpunkt $t = 10$ mit der Lösung aus b).
Hinweis: Sie können in Matlab die Funktion *circshift* verwenden um die Werte eines Vektors zyklisch zu verschieben.

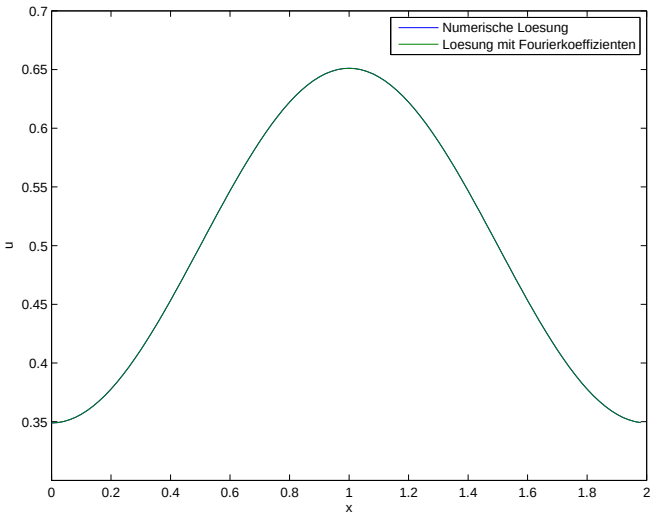
```
%Laenge des Drahts
L=2;

%Konstante in Waermeleitungsgleichung
D=10^(-2);

%Anzahl Punkte auf dem Draht
N=10^2;

%Schrittweite
dx=L/N;
```

Bitte wenden!

```
%Endzeitpunkt
T=10;

%Zeitschrittweite
dt=10^(-2);

%Anzahl Zeitschritte
Nt=T*dt^(-1);

%Temperatur zum Zeitpunkt 0
u=[linspace(0,1-2/N,N/2) linspace(1,2/N,N/2)];

%Iteration
for j=1:Nt
    u=u+D*dt/dx^2*(circshift(u,[0,1])-2*u+circshift(u,[0,-1]));
end
%Temperatur zum Endzeitpunkt T plotten und
%mit Loesung aus b) vergleichen
plot(linspace(0,L*(1-1/N),N),u(:),x,y(3,:))
xlabel('x');
ylabel('u');
legend('Numerische Loesung','Loesung mit Fourierkoeffizienten')
print('-dpdf','num.pdf');
max(abs(y(3,:)-u(1,:)))
```

Es ist kein Unterschied zu erkennen der Fehler $\max_i |u(x_i, t_j) - u_{i,j}|$ beträgt ca. $2 \cdot 10^{-5}$.

Siehe nächstes Blatt!



3. Wärmeleitung im offenen Draht

Wir betrachten nun einen offenen Draht der Länge $L = 1$. Die beiden Enden des Drahts werden konstant auf die Temperaturen 0 bzw. 1 gehalten, dass heisst es gelte $u(0,t) = 0$ und $u(1,t) = 1$ für alle $t \geq 0$.

a) Zeigen Sie, dass $u(x,t) = x$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{für } 0 < x < 1,\ t > 0 \tag{3}$$

und die Randbedingugen $u(0,t) = 0$ und $u(1,t) = 1$ für alle $t \geq 0$ erfüllt.
Lösung: Es gilt dann $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, die Wärmeleitungsgleichung ist also erfüllt. Zudem ist $u(0,t) = 0$ und $u(1,t) = 1$ für alle $t \geq 0$.

Bitte wenden!

b) Sei nun die Temperatur am Anfang gegeben durch

$$u(x,0) = u_0(x) := x^2.$$

Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung (3) für $D = 1$.
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $u(x,t) = x + v(x,t)$ und schreiben Sie $v(x,t)$ als Linearkombination von Basislösungen der Form $X(x)T(t)$.
Lösung: Wegen a) erfüllt $v(x,t) = u(x,t) - x$ ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung. Aus der Vorlesung folgt, dass Basislösungen von der Form

$$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{-D\omega^2 t}$$

sind. Wegen der Randbedingungen $v(0,t) = u(0,t) = 0$ und $v(1,t) = u(1,t) - 1 = 0$ gilt $A = 0$ und $\omega = n\pi$ für ein $n \in \{1, 2, \dots\}$. Wir verwenden daher den Ansatz

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x) e^{-D(n\pi)^2 t}. \tag{4}$$

Die Koeffizenten B_n bestimmen wir so, dass die Anfangsbedingung $v(x,0) = u_0(x) - x$ erfüllt ist. Für $t = 0$ ist (4) die Fouriertransformation einer ungeraden Funktion. Wir betrachten daher die ungerade 2-periodische Fortsetzung $\bar{u_0}$ von $u_0(x) - x = x^2 - x$. Da $\bar{u_0}$ und $\sin(n\pi x)$ ungerade sind gilt für die Fourierkoeffizienten

$$B_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} \bar{u_0}(x)\sin(n\pi x)dx = \frac{4}{2}\int_0^1 (x^2 - x)\sin(n\pi x)dx.$$

Mittels partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{4}{2}\int_0^1 (x^2 - x)\sin(n\pi x)dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\left((x^2 - x)(-\cos(n\pi x))|_0^1 - \int_0^1 (2x-1)(-\cos(n\pi x))dx\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_0^1 (2x-1)\cos(n\pi x)dx \\
&= \frac{1}{(n\pi)^2}\left((2x-1)\sin(n\pi x)|_0^1 - \int_0^1 2\sin(n\pi x)dx\right) \\
&= \frac{1}{(n\pi)^3} 2\cos(n\pi x)|_0^1 \\
&= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{(n\pi)^3} & n \text{ ungerade} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Die Lösung lautet also

$$u(x,t) = x - \sum_{n \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{4}{(n\pi)^3}\sin(n\pi x)e^{-D(n\pi)^2 t}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Welche Temperaturverteilung wird sich für $t \to \infty$ einstellen?
Lösung: Alle Summanden ausser x gehen für $t \to \infty$ gegen Null. Es gilt also $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = x$. Die Temperatur wir also schlussendlich linear von einem Ende des Draht zum anderen Ende ansteigen.

d) Bleibt die Wärme im Draht zeitlich konstant, dass heisst gilt $\int_0^L u(x,t)dx = \text{konst.}$?

Lösung: Nein, am Anfang gilt $\int_0^1 udx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$ für $t \to \infty$ gilt aber $\int_0^1 udx \approx \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$. Die Wärme bleibt also nicht erhalten. Das hat damit zu tun, dass es sich hier nicht um ein geschlossenes System handelt.

e) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2D}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx = u_x(1,t) - \int_0^L (u_x)^2dx$$

gilt. Berechnen Sie die Ableitung der Energie $\frac{1}{2D}\int_0^L u^2dx$ nach der Zeit an der Stelle $t = 0$. Nimmt die Energie zu, ab oder bleibt Sie konstant?
Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2D}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx &= \frac{1}{D}\int_0^L uu_tdx \\
&= \int_0^L uu_{xx}dx \\
&= uu_x|_0^1 - \int_0^L (u_x)^2dx \\
&= u_x(1,t) - \int_0^L (u_x)^2dx.
\end{aligned}$$

An der Stelle $t = 0$ gilt also

$$\frac{1}{2D}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx = u_0'(1) - \int_0^L u_0'(x)^2dx = 2 - \int_0^1 4x^2dx = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Da die Ableitung positiv ist nimmt die Energie am Anfang zu.