D-HEST,
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Mathematik III

HS 2015

Lösung 13

Bitte wenden!

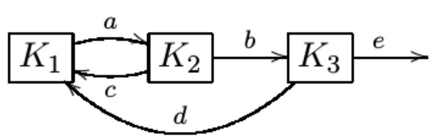
1. Kompartimentsystem

Im Folgenden seien a, b, c, d, e reelle Zahlen mit $0 < a, b, c, d < 1$ und

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{bmatrix} -a & c & d \\ a & -(b+c) & 0 \\ 0 & b & -(d+e) \end{bmatrix}.$$

Das lineare DGL-System $y'(t) = Ay(t)$ mit $t \geq 0$ beschreibe die Entwicklung in den Kompartimenten K_1, K_2, K_3 wobei $y_i(t)$ die Entwicklung in K_i sei, für $i = 1, 2, 3$.

a) Zeichnen Sie das Kompartimentsystem und beschriften sie die Pfeile mit a, b, c, d, e. Achten Sie dabei auf die Pfeilrichtung!



b) Zeigen Sie, falls $e = 0$, dass es für jede Wahl von a, b, c, d einen nichttrivialen stationären Zustand des Systems $y'(t) = Ay(t)$, $t \geq 0$ gibt, das heisst, eine von Null verschiedene Lösungsfunktion $t \mapsto y^\infty(t)$, welche nicht von t abhängt. Für eine stationäre Lösungsfunktion y_∞ gilt $y_\infty' = 0$,

$$0 \stackrel{!}{=} y_\infty'(t) = Ay_\infty$$

Das heisst, es gibt einen nichttrivialen stationären Zustand des Systems genau dann, wenn das homogene LGS $Ay_\infty = 0$ eine nichttriviale Lösung hat, also genau dann, wenn $\det(A) = 0$. Falls $e = 0$, gilt:

$$\det(A) = -a(b+c)d + abd - ac(-d) = 0$$

für alle a, b, c, d, und somit existiert ein nichttrivialer stationärer Zustand. *Bemerkung*: Das heisst auch, dass $\lambda = 0$ immer einer der Eigenwerte von A ist, und der zugehörige Eigenvektor einer stationären Lösungsfunktion entspricht.

Wir betrachten nun das DGL-System:

$$x'(t) = Bx(t) + f(t) \quad \text{wobei} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{mit Anfangswert} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

für verschiedene Wahlen von f.

Siehe nächstes Blatt!

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B. Berechnen Sie daraus e^{Bt}, und somit die Lösung $x(t)$ falls $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die charakteristische Gleichung $\det(B - \lambda I) \stackrel{!}{=} 0$ ergibt die Eigenwerte:

$$\det(B - \lambda I) = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{3}\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{3}.$$

Nun lösen wir $Bv_i = \lambda_i v_i$ um die zugehörigen Eigenvektoren zu bestimmen:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} : B\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}b \\ -\frac{1}{3}b \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{3} : B\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a - \frac{1}{6}b \\ -\frac{1}{3}b \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also mit $P = (v_1, v_2)$ erhalten wir:

$$B = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

und somit:

$$e^{Bt} = Pe^{Dt}P^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{3}t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} & e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{3}t} \\ 0 & e^{-\frac{1}{3}t} \end{bmatrix}.$$

Die Lösung ist folglich:

$$x(t) = e^{Bt}x(0) = \begin{bmatrix} 2e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{1}{3}t} \\ e^{-\frac{1}{3}t} \end{bmatrix} = 2e^{\lambda_1 t}v_1 + e^{\lambda_2 t}v_2.$$

d) Sei nun $f(t) = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$. Benutzen Sie die Substitution $z(t) = P^{-1}x(t)$ für eine geeignete Matrix P, um die Differentialgleichungen zu entkoppeln und separat zu lösen. Bestimmen Sie dann die Lösung $x(t)$ durch Rücksubstitution. Mit der Substitution $z(t) = P^{-1}x(t)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} Pz'(t) &= BPz(t) + f(t) \\ Pz'(t) &= PDP^{-1}Pz(t) + f(t) \\ Pz'(t) &= PDz(t) + f(t) \\ z'(t) &= Dz(t) + P^{-1}f(t) \end{aligned}$$

Das heisst,

$$\begin{cases} z_1'(t) &= -\frac{1}{2}z_1(t) \\ z_2'(t) &= -\frac{1}{3}z_2(t) + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) &= A_1 e^{-\frac{1}{2}t} \\ z_2(t) &= A_2 e^{-\frac{1}{3}t} + at + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1(t) &= A_1 e^{-\frac{1}{2}t} \\ z_2(t) &= A_2 e^{-\frac{1}{3}t} + 3t - 9 \end{cases}$$

Bitte wenden!

Rücksubstitution:

$$x(t) = Pz(t) = \begin{bmatrix} A_1 e^{-\frac{1}{2}t} - A_2 e^{-\frac{1}{3}t} - 3t + 9 \\ A_2 e^{-\frac{1}{3}t} + 3t - 9 \end{bmatrix}$$

Anfangswert einsetzen ergibt die Konstanten:

$$x(0) = \begin{bmatrix} A_1 - A_2 + 9 \\ A_2 - 9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = 2, A_2 = 10$$

und somit:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-\frac{1}{2}t} - 10e^{-\frac{1}{3}t} - 3t + 9 \\ 10e^{-\frac{1}{3}t} + 3t - 9 \end{bmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Fourier Reihen

Die Funktion f sei gegeben durch:

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{für} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Weiterhin sei:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

die Fourier Reihe zur Funktion, die aus f durch 2π-periodische Fortsetzung entsteht.

a) Zeigen Sie, dass f ungerade ist. Was können Sie hieraus über die Koeffizienten a_n, $n \geq 0$, und b_n, $n \geq 1$ von F folgern? Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -f(x),$$

also ist f ungerade. Dann gilt $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$.

b) Bestimmen Sie $F(x)$. Weil f ungerade ist,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sinh(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\sinh(x)\cos(nx)|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cosh(x)\cos(nx)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n}\sinh(\pi) + \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\cosh(x)\cos(nx)\mathrm{d}x - \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\sinh(x)\sinh(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n}\sinh(\pi) - \frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\sinh(x)\sinh(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sinh(\pi) - \frac{1}{n^2}b_n.
\end{aligned}$$

Das heisst:

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}2n}{(n^2+1)\pi}\sinh(\pi).$$

Also gilt:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2n}{(n^2+1)\pi}\sinh(\pi)\sin(nx).$$

Bitte wenden!

c) Sei $g(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$, eine *beliebige* stetige, ungerade Funktion, und:

$$G(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad \text{mit} \quad x \in (-\pi, \pi),$$

die zugehörige Fourier Reihe in komplexer Form. Für welche $n \in \mathbb{Z}$ *muss* $c_n = 0$ gelten? Begründen Sie Ihre Antwort. *Hinweis*: Verwenden Sie a) und b). Für die komplexen Koeffizienten c_n gilt:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & n < 0 \end{cases},$$

wobei a_n, b_n die Koeffizienten der Fourier Reihe in reeller Form sind. Sei g ungerade, also $a_n = 0$, für alle $n \geq 0$. Demnach ist $c_0 = 0$. Alle anderen c_n sind nicht notwendigerweise null, ein Gegenbeispiel ist durch die Fourier Reihe zu f aus Aufgabenteil b) gegeben.

Gegeben sei folgende inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$y''(x) + 3y(x) = \sin^3(x).$$

d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x) : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dieser Gleichung. Verwenden Sie hierzu den Ansatz:

$$y_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{b_n} \sin(nx),$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten $\widetilde{b_n} \in \mathbb{R}$, um eine partikuläre Lösung zu finden. *Hinweis*: es gilt $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$. Bekanntlich lautet die allgemeine Lösung $y = y_h + y_p$, wobei y_h die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + 3y = 0$ ist und y_p irgendeine Lösung des inhomogenen Problems ist. Die Nullstellen von $z^2 + 3 = 0$ sind $z_1 = \sqrt{3}i$ und $z_2 = -\sqrt{3}i$, demnach ist die allgemeine Lösung von $y'' + 3y = 0$:

$$y_h = C_1 e^{\sqrt{3}ix} + C_2 e^{-\sqrt{3}ix} = C_1' \sin(\sqrt{3}x) + C_2' \cos(\sqrt{3}x),$$

wobei C_1, C_2, C_1' und C_2' beliebige reelle Konstanten sind. Mit dem Ansatz $y_p = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{b_n} \sin(nx)$ lautet die 2. Ableitung von y_p:

$$y_p'' = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \widetilde{b_n} \sin(nx).$$

Siehe nächstes Blatt!

Rücksubstitution in $y_p''(x) + 3y_p(x) = \sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$ und Koeffizientenvergleich ergeben:

$$\begin{aligned} -\widetilde{b_1} + 3\widetilde{b_1} &= \frac{3}{4} \\ -9\widetilde{b_3} + 3\widetilde{b_3} &= -\frac{1}{4} \\ -n^2\widetilde{b_n} + 3\widetilde{b_n} &= 0 \quad n \neq 1, 3. \end{aligned}$$

Also ist $y_p = \frac{3}{8}\sin(x) + \frac{1}{24}\sin(3x)$ eine partikuläre Lösung, und die allgemeine Lösung lautet:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{3}{8}\sin(x) + \frac{1}{24}\sin(3x) + C_1 e^{\sqrt{3}ix} + C_2 e^{-\sqrt{3}ix} \\ &= \frac{3}{8}\sin(x) + \frac{1}{24}\sin(3x) + C_1'\sin(\sqrt{3}x) + C_2'\cos(\sqrt{3}x), \end{aligned}$$

wobei C_1, C_2, C_1' und C_2' beliebige (reelle) Konstanten sind.

Bitte wenden!

3. Laplace Transformation

Notation: im Folgenden bezeichne:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t$$

die Laplace-Transformierte einer gegebenen Funktion f, sofern das Integral existiert und endlich ist.

a) In dieser Teilaufgabe sei $f(t) = te^{\alpha t}$ mit $\alpha > 0$.

- Berechnen Sie $\mathcal{L}\{f\}(s)$ direkt aus der Definition. Es gilt:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty te^{-(s-\alpha)t} \mathrm{d}t = t\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}|_0^\infty + \frac{1}{s-\alpha}\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{(s-\alpha)^2},$$

  wobei streng genommen der Definitionsbereich $\Re(s) > \alpha$ ist.

- Bestimmen Sie mithilfe des Ableitungssatzes die Originalfunktion zu:

$$\frac{s}{(s-\alpha)^2}.$$

  Aus obigem Teil und dem Ableitungssatz gilt:

$$\frac{s}{(s-\alpha)^2} = s\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{f'\}(s) + f(0) = \mathcal{L}\{f'\}(s).$$

  Also ist $f'(t) = (1+\alpha t)e^{\alpha t}$ die Originalfunktion zu $\frac{s}{(s-\alpha)^2}$.

b) Sei:

$$g(t) = 5\cos(t-4)\sigma(t-4) + e^{-3t}(2t)^3,$$

wobei $\sigma(u) = 1$ für $u \geq 0$ und $\sigma(u) = 0$ für $u < 0$. Wie lautet $\mathcal{L}\{g\}(s)$? Mittels geeigneter Transformationssätze erhält man nacheinander:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g\}(s) &= 5e^{-4s}\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) + \mathcal{L}\{(2t)^3\}(s+3)\\ &= 5e^{-4s}\frac{s}{s^2+1} + 8\mathcal{L}\{t^3\}(s+3)\\ &= 5e^{-4s}\frac{s}{s^2+1} + 8\frac{3!}{(s+3)^4}.\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Bestimmen Sie unter Verwendung des Faltungssatzes die Originalfunktion $h(t)$ zu:

$$\frac{s}{(s^2+1)(s-a)}, \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Gemäss Faltungssatz und mit doppelter partieller Integration erhält man:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t \cos(u) e^{a(t-u)} \mathrm{d}u \\ &= \sin(u) e^{a(t-u)}|_0^t + a \int_0^t \sin(u) e^{a(t-u)} \mathrm{d}u \\ &= \sin(t) + \left[a(-\cos(u)) e^{a(t-u)}\right]_0^t - a^2 \int_0^t \cos(u) e^{a(t-u)} \mathrm{d}u \\ &= \sin(t) - a\cos(t) + ae^{at} - a^2 h(t), \end{aligned}$$

und Auflösen nach $h(t)$ ergibt:

$$h(t) = \frac{1}{1+a^2} \left(\sin(t) - a\cos(t) + ae^{at}\right).$$

d) Für gegebene $A \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$ seien die Funktionen $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ Lösungen des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} \phi_1'' + \beta(\phi_1 - \phi_2) = 0 \\ \phi_2'' - \beta(\phi_1 - \phi_2) = 0 \end{aligned}$$

zur Anfangsbedingung $\phi_1(0) = A$, $\phi_2(0) = 0$ und $\phi_1'(0) = \phi_2'(0) = 0$, wobei $\phi_i'(t) = \mathrm{d}\phi_i(t)/\mathrm{d}t$ die Ableitung nach t bezeichnet.

- Seien $F_i(s) = \mathcal{L}\{\phi_i\}(s)$ für $i = 1, 2$. Bestimmen Sie F_1 und F_2 in Abhängigkeit von s, A und β. Mit dem Ableitungssatz (für die zweite Ableitung) gilt:

$$\begin{aligned} s^2 F_1(s) + \beta(F_1(s) - F_2(s)) = sA \\ s^2 F_2(s) - \beta(F_1(s) - F_2(s)) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in F_1, F_2, und es gilt:

$$\begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} sA \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} s^2+\beta & -\beta \\ -\beta & s^2+\beta \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Aus $\det(M) = (s^2+\beta)^2 - \beta^2$ ergibt sich also:

$$\begin{pmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{pmatrix} = \frac{1}{(s^2+\beta)^2-\beta^2} \begin{pmatrix} s^2+\beta & \beta \\ \beta & s^2+\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sA \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{(s^2+\beta)^2-\beta^2} \begin{pmatrix} (s^2+\beta)sA \\ \beta sA \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie durch Rücktransformation die Funktion $\phi_1(t)$. *Hinweis*: machen Sie eine Partialbruchzerlegung. Aus dem ersten Teil wissen wir, dass:

  $$F_1(s) = \frac{(s^2+\beta)sA}{(s^2+\beta)^2-\beta^2} = \frac{A(s^2+\beta)}{(s^2+2\beta)s}.$$

  Die gesuchte Funktion ϕ_1 ist die Originalfunktion zu F_1. Wir bestimmen sie mittels Partialbruchzerlegung. Der übliche Ansatz:

  $$\frac{A(s^2+\beta)}{(s^2+2\beta)s} = \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{s^2+2\beta}$$

  liefert nach Multiplikation mit $(s^2+2\beta)s$:

  $$A(s^2+\beta) = B(s^2+2\beta) + (Cs+D)s = 2\beta B + Ds + (B+C)s^2,$$

  und Koeffizientenvergleich ergibt $B = \frac{A}{2}$, $D = 0$ und $C = A - B = \frac{A}{2}$. Insgesamt gilt also:

  $$F_1(s) = \frac{A}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+2\beta}\right),$$

  und damit:

  $$\phi_1(t) = \frac{A}{2}\left(1 + \cos(\sqrt{2\beta}t)\right).$$