D-HEST,
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Mathematik III

HS 2015

Lösung 2

Bitte wenden!

1. Die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe einer T-periodischen ($T > 0$) Funktion $f(x)$ lautet

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz ist. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_n der Fourier-Reihe zu den Funktionen:

a) $g(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$ 2-periodisch mit $x \in [0, 2[$.

Die Fourier-Reihe ist linear, das heisst, $FR(g_1 + g_2) = FR(g_1) + FR(g_2)$. Daher berechnen wir separat für $g_1(x) = 1$ und $g_2(x) = -e^{-\frac{x}{2}}$. Es ist $FR(g_1) = 1e^0$ und somit $c_0^{(1)} = 1$. Um die Koeffizienten von $FR(g_2)$ zu bestimmen, berechnen wir

$$\begin{aligned} c_n^{(2)} &= \frac{1}{T}\int_0^T g_2(x)e^{-\frac{2\pi}{T}inx}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (-e^{-\frac{x}{2}})e^{-i\pi nx}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{1+2i\pi n}e^{-(1+2i\pi n)\frac{x}{2}}\right]_0^2 \\ &= \frac{e^{-1}-1}{1+2i\pi n} \end{aligned}$$

da $e^{-2\pi in} = 1$. Mit $c_n = c_n^{(1)} + c_n^{(2)}$ erhalten wir schlussendlich

$$c_n = \frac{e^{-1}-1}{1+2i\pi n} \quad \text{und} \quad c_0 = e^{-1}$$

b) $h(x) = 1 - e^{-2\pi x}$ 1-periodisch mit $x \in [0, 1[$.

Analog zu a) mit $T = 1$, $c_0^{(1)} = 1$ und

$$\begin{aligned} c_n^{(2)} &= \int_0^1 (-e^{-2\pi x})e^{-2\pi inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi(1+in)}\left[e^{-2\pi(1+in)x}\right]_0^1 \\ &= \frac{e^{-2\pi}-1}{2\pi(1+in)} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

also

$$c_n = \frac{e^{-2\pi} - 1}{2\pi(1 + in)} \quad \text{und} \quad c_0 = \frac{e^{-2\pi} - 1}{2\pi} + 1$$

Bitte wenden!

2. Bestimmen Sie die trigonometrischen Koeffizienten a_n, b_n der (reellen) Fourier-Reihe zur 2π-periodischen Funktion f mit:

$$f(x) = \cos(\frac{x}{2}), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

auf zwei verschiedene Arten:

a) durch direktes Ausrechnen mittels

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \geq 1$$

Hinweis: $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Es ist $b_n = 0$, da f gerade ist. Für a_n verwenden wir den Hinweis und berechnen

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\frac{x}{2})\cos(nx)dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((n+\frac{1}{2})x) + \cos((n-\frac{1}{2})x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\sin((n+\frac{1}{2})x) + \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\sin((n-\frac{1}{2})x)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n+\frac{1}{2}}\sin((n+\frac{1}{2})\pi) + \frac{2}{n-\frac{1}{2}}\sin((n-\frac{1}{2})\pi)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} - \frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}} = \frac{4(-1)^n}{1-4n^2}\end{aligned}$$

und somit $a_n = \frac{4(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}$.

b) durch Berechnung der komplexen Koeffizienten c_n und Bestimmung von a_n, b_n aus c_n.

Variante I: Es ist

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\frac{x}{2})e^{-inx}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(e^{-i\frac{x}{2}} + e^{i\frac{x}{2}})e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-i(n+\frac{1}{2})}e^{-i\frac{x}{2}}e^{-inx} + \frac{1}{-i(n-\frac{1}{2})}e^{i\frac{x}{2}}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{-i-i}{-i(n+\frac{1}{2})} + \frac{i-(-i)}{-i(n-\frac{1}{2})}\right) \\ &= (-1)^n\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) = \frac{4(-1)^n}{1-4n^2}\end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Also ist $c_n = \frac{2(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}$. Dann berechnet sich a_n mittels folgender Formeln:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_n &= c_n + c_{-n} \end{aligned}$$

Da hier $c_n = c_{-n}$ gilt $a_n = 2c_n = \frac{4(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}$ und $b_n = i(c_n - c_{-n}) = 0$.

Variante II: Es gilt $c_n = \frac{1}{2\pi} I$, wobei

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\frac{x}{2}) e^{-inx} dx \\ &= \Big[2\sin(\frac{x}{2}) e^{-inx}\Big]_{-\pi}^{\pi} + 2in \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\frac{x}{2}) e^{-inx} dx \\ &= 2((-1)^n + (-1)^n) + \Big[-4in\cos(\frac{x}{2}) e^{-inx}\Big]_{-\pi}^{\pi} - 4i^2n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\frac{x}{2}) e^{-inx} dx \\ &= 4(-1)^n + 4n^2 I \end{aligned}$$

da $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(-\pi/2) = -1$, $\cos(\pm\pi/2) = 0$, $e^{-in\pi} = (-1)^n$ und $i^2 = -1$. Also $I = \frac{4(-1)^n}{1-4n^2}$ und wiederum $c_n = \frac{2(-1)^n}{(1-4n^2)\pi}$.

Bitte wenden!

3. Eine 2π-periodische Funktion wird im Intervall $0 \leq x < 2\pi$ durch die Gleichung $f(x) = \exp(x)$ beschrieben.

a) Bestimmen Sie ihre Fourier-Reihe in *komplexer* Form.

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt mit $c = 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(1-in)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} \left[e^{(1-in)x} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1+in}{1+n^2} (e^{2\pi} - 1) \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $e^{2\pi i n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ verwendet haben. Also lautet die gesuchte Fourier-Reihe

$$\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}$$

b) Wie lauten die Koeffizienten ihrer reellen Form?

Es gilt

$$a_0 = 2c_0 = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}$$

und für alle $n \geq 1$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left[\frac{1+in}{1+n^2} + \frac{1-in}{1+n^2} \right] = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \frac{1}{1+n^2}$$

sowie

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \left[\frac{1+in}{1+n^2} - \frac{1-in}{1+n^2} \right] = -\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \frac{n}{1+n^2}$$

Bemerkung: wir erklären im Folgenden, wie sich die komplexe Darstellung einer Fourier-Reihe aus der reellen herleiten lässt und erläutern die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned} \tag{1}$$

die oben verwendet wurden. Sei also f eine 2π-periodische Funktion (stetig, beschränkt und mit höchstens endlich vielen Sprungstellen) mit reeller Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Siehe nächstes Blatt!

wobei a_n und b_n wie oben gegeben sind. Wir verfolgen das Ziel, diese Reihe in die Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

für geeignete Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$ zu bringen. Aus der Euler'schen Identität $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ erhält man, dass $\cos(nx) = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ und $\sin(nx) = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} = -\frac{i}{2}(e^{inx}-e^{-inx})$ gilt. Einsetzen in die reelle Fourierentwicklung ergibt

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\\
=&\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)\\
=&\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx}\right)\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx}
\end{aligned}$$

Wir betrachten die erste Reihe in der vorigen Zeile separat. Mit der Indextransformation $n \mapsto -n$ gilt, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} = \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n})e^{inx}$$

Einsetzen in die Herleitung ergibt nun

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)) = \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{2}(a_{-n}+ib_{-n})e^{inx}+\frac{a_0}{2}e^{0nx}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n-ib_n)e^{inx}$$

Dies ist tatsächlich von der Form $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, wenn man

$$\begin{aligned}
c_n &= (a_n - ib_n)/2 \quad \forall n \geq 1\\
c_0 &= a_0/2\\
c_{-n} &= (a_n + ib_n)/2 \quad \forall n \leq -1
\end{aligned} \tag{2}$$

definiert. Mit dieser Definition erhält man nun aus den Integral-Formeln für a_n und b_n entsprechende Integral-Formeln für die Koeffizienten c_n. Zum Beispiel gilt

Bitte wenden!

für $n \geq 1$, dass

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos(nx)dx - \frac{i}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin(nx)dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)(\cos(nx) - i\sin(nx))dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)(\cos(-nx) + i\sin(-nx))dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\exp(-inx)dx \end{aligned}$$

was genau den oben angegebenen Formeln entspricht (hier haben wir in der 2. Zeile die Linearität des Integrals verwendet und in der dritten Zeile, dass cos gerade und sin ungerade ist). Die Fälle $n = 0$ und $n \leq -1$ sind analog. Des Weiteren kann man (2) auch nach a_n und b_n auflösen. Die dritte Zeile von (2) lässt sich zum Beispiel als $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ für $n \geq 1$ schreiben und Addition mit der ersten Zeile aus (2) ergibt $a_n = c_n + c_{-n}$ für alle $n \geq 1$. Auf ähnliche Weise ergibt sich $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Dies sind genau die Transformationsregeln aus (1).