D-HEST,
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Lösung 3

Bitte wenden!

1. Das DGL-System für die Populationsgrössen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ mit $t \geq 0$ zweier sich bekämpfenden Bienenvölker sei

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) \end{aligned}$$

Die Populationsgrössen zum Zeitpunkt Null seien gegeben durch $x_1(0) = 5 \cdot 10^3$ und $x_2(0) = 3 \cdot 10^3$.

a) Die DGL in Matrixform lautet $x' = Ax$ wobei $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Wie lautet in unserem Fall A?

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte von A und lösen Sie das Anfangswertproblem.

Lösung: Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1,$$

also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Eigenvektoren v_1, v_2 sind Lösungen von $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$ beziehungsweise $(A - \lambda_2 I)v_2 = 0$. Da

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt also z.b. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die allgemeine Lösung lautet nun

$$x(t) = v_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + v_2 c_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} c_1 e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 e^{-t}.$$

Die Anfangswerte führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 \cdot 10^3 \\ 3 \cdot 10^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_2,$$

mit Lösung $c_1 = 10^3$ und $c_2 = 4 \cdot 10^3$. Die Lösung des DGL-Systems lautet also

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} 10^3 e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 4 \cdot 10^3 e^{-t}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Zu welchem Zeitpunkt $t^* > 0$ ist das zweite Bienenvolk ausgestorben? Wie gross ist zu diesem Zeitpunkt die Population des ersten Volkes?
Lösung: Es gilt $x_2(t^*) = 0$ und daher

$$(-e^{t^*} + 4e^{-t^*})10^3 = 0.$$

Durch Multiplikation mit e^{t^*} und Faktorisierung erhalten wir

$$(2 - e^{t^*})(2 + e^{t^*})10^3 = 0.$$

Folglich ist $2 = e^{t^*}$ und somit $t^* = ln(2)$. Die Population des ersten Volkes ist

$$x_1(t^*) = e^{t^*}10^3 + 4 \cdot 10^3 e^{-t^*} = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 \frac{1}{2} = 4 \cdot 10^3.$$

d) Zeigen Sie, ohne Teilaufgabe c) zu verwenden, dass die Grösse $(x_1(t))^2 - (x_2(t))^2$ konstant bleibt. Verwenden Sie dies um die Grösse der Population des ersten Volkes zum Zeitpunkt t^* zu berechnen und vergleichen Sie mit c).
Lösung: Wir leiten ab

$$\frac{d}{dt}\left(x_1^2(t) - x_2^2(t)\right) = 2x_1(t)x_1'(t) - 2x_2(t)x_2'(t) = -2x_1(t)x_2(t) - 2x_2(t)(-x_1(t)) = 0.$$

Also bleibt die Grösse konstant und es gilt

$$x_1^2(t^*) - x_2^2(t^*) = x_1^2(0) - x_2^2(0) = (5 \cdot 10^3)^2 - (3 \cdot 10^3)^2 = 16 \cdot 10^6.$$

Da $x_2(t^*) = 0$ also $x_1(t^*) = \sqrt{16 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^3$ genau das gleiche Resultat wie in c).

Bitte wenden!

2. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - 7y' + 6y = 0 \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).
Lösung: Wir verwenden den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$. Einsetzen in (1) ergibt

$$\lambda^3 e^{\lambda t} - 7\lambda e^{\lambda t} + 6e^{\lambda t} = 0,$$

was equivalent ist zu $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$ und

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)e^{\lambda t} = 0.$$

Wir erhalten daher die Lösungen $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = e^{2t}$ und $y_3(t) = e^{-3t}$. Die allgemeine Lösung erhalten wir durch lineares Kombinieren dieser Lösungen:

$$y(t) = C_1 e^t + c_2 e^{2t} + C_3 e^{-3t}, \text{ für } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

b) Wir betrachten nun $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$, wobei $y(t)$ eine Lösung von (1) sei. Die Funktion erfüllt dann das DGL-System

$$Y'(t) = AY(t). \tag{3}$$

Bestimmen Sie A (diese Matrix heisst Begleitmatrix zur Differentialgleichung (1)).

Lösung: Es gilt $y''' = 7y' - 6y$ und somit

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = AY(t), \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Überprüfen Sie, dass die Eigenwerte von A genau durch die Lösungen der zur Differentialgleichung (1) assoziierten charakteristischen Gleichung $\lambda^3 - 7\lambda + 6\lambda = 0$ gegeben sind.
Lösung: Das charakteristische Polynom von A lautet (Entwicklung nach der 1. Zeile)

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 7 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 7) - 6 = -\lambda^3 + 7\lambda - 6$$

Die Eigenwerte von A sind die Lösungen von $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$. Genau das gleiche Polynom wie in a).

Siehe nächstes Blatt!

d) Geben Sie ein Fundamentalsystem $Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)$ für (3) an (d.h. $Y_1(t), \dots, Y_3(t)$ erfüllen jeweils (3) und sie sind linear unabhängig). Begründen Sie Ihre Antwort.
Lösung: Wir setzen

$$Y_n(t) = \begin{pmatrix} y_n(t) \\ y_n'(t) \\ y_n''(t) \end{pmatrix}, \text{für } n = 1, 2, 3,$$

wobei y_n die Funktionen aus (2) sind. Da y_n eine Lösung für (1) ist, gilt wegen b), dass $Y_n'(t) = AY_n(t)$, für $n = 1, 2, 3$. Weiter berechnet man

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; Y_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \; Y_2(t) = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix},$$

und die gewünschte lineare Unabhängigkeit folgt aus

$$\det([Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t)]) = e^t e^{2t} e^{-3t} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} = 20 \neq 0.$$

3. Bestimmen Sie die Lösung zum Anfangswertproblem mit DGL-System

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_2(t) + 2x_3(t) \\ x_3'(t) &= 3x_1(t) - 9x_2(t) + 7x_3(t) \end{aligned}$$

und Anfangswerten $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (3, 6, 10)$.
Lösung: Die dazugehörige Matrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist (Entwicklung nach der 1. Zeile)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 3 & -9 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda((-1-\lambda)(7-\lambda) + 18) + 6 \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$. Dazugehörige Eigenvektoren v_1, v_2 und v_3 sind Lösungen zu

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} v_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix} v_2 = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} v_3 = 0,$$

also z.b. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Mit $S = [v_1 v_2 v_3]$ (Matrix mit v_1, v_2 und v_3 als Spalten) und $D = diag(1, 2, 3)$ (Diagonalmatrix mit Einträgen $1, 2$ und 3 auf der Diagonalen) gilt also $A = SDS^{-1}$. Mit $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ und $y = S^{-1}x$ gilt nun

$$x' = Ax \Rightarrow x' = SDS^{-1}x \Rightarrow S^{-1}x' = DS^{-1}x \Rightarrow y' = Dy.$$

Dies ist ein entkoppeltes DGL-System mit der allgemeinen Lösung $y(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}$.

Folglich gilt

$$x(t) = Sy(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Mit den Anfangswerten erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Mit Gauss erhält man

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten sind also $(C_1, C_2, C_3) = (1, 1, 1)$ und die Lösung des Anfangswertproblems somit

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + e^{2t} + e^{3t} \\ e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} \\ e^t + 3e^{2t} + 6e^{3t} \end{pmatrix}.$$