Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Lösung 4

Bitte wenden!

1. Berechnen Sie e^A für folgende Matrizen A

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, Hinweis: Betrachte $T^{-1}AT$ wobei $T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B+C$. Da $CB = BC$ ist, gilt $e^A = e^{B+C} = e^B \cdot e^C$.
Es ist $e^B = \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}$ und $e^C = E_2 + C + \frac{1}{2}C^2 + \dots$.
Da $C^2 = 0$, ist $e^C = E_2 + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also $e^A = e^B \cdot e^C = \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$
$e^3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Es gilt mit $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{pmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{11} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Also ist $A = TDT^{-1}$. Zudem gilt für $n \in \mathbb{N}$

$A^n = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}) = TD(T^{-1}T)D(T^{-1}T) \cdots (T^{-1}T)DT^{-1} = TD^nT^{-1}$.

und somit

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{TD^nT^{-1}}{n!} = T \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} \right) T^{-1} = Te^DT^{-1}.$$

Also folgt

$$e^A = Te^DT^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-1} + 2e^2 & -2e^{-1} + 2e^2 \\ e^{-1} - e^2 & 2e^{-1} - e^2 \end{pmatrix}.$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} B & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & C \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad C = 0.$$

Ähnlich wie in Teilaufgabe a) gilt

$$e^B = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-2} \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Aus $A^n = \begin{pmatrix} B^n & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & C^n \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $e^A = \begin{pmatrix} e^B & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} & e^C \end{pmatrix}$ und somit

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{-2} & e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

2. Sei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$e^{tA} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}, \quad \text{für } t \in \mathbb{R}$$

Hinweis: Es gilt $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Lösung: Man schreibt $tA = B + C$ mit $B = \begin{pmatrix} at & 0 \\ 0 & at \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix}$ und überprüft leicht, dass $BC = CB$ gilt. Folglich gilt $e^{tA} = e^{B+C} = e^A e^B$. Da B eine Diagonalmatrix ist gilt $e^B = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} = e^{at} E$, wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Identitätsmatrix bezeichnet. Wir berechnen nun e^C. Da

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -bt \\ bt & 0 \end{pmatrix} = bt \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C^2 = \begin{pmatrix} -(bt)^2 & 0 \\ 0 & -(bt)^2 \end{pmatrix} = -(bt)^2 E$$

gilt

$$\begin{aligned} e^C &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-(bt)^2)^n E^n}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C(-(bt)^2)^n E^n}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(bt)^{2n}}{(2n)!} E + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(bt)^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \cos(bt) E + \sin(bt) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$e^{tA} = e^{B+C} = e^A e^B = e^{at} E \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Funktion $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, welche das Anfangswertproblem $y'(t) = Ay(t)$, für $t \geq 0$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At} y(0) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) - \sin(bt) \\ \cos(bt) + \sin(bt) \end{pmatrix} \\ &= e^{at} \cos(bt) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{at} \sin(bt) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Die Funktion $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, t \geq 0$ erfülle das DGL-System

$$y' = Ay \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses DGL-Systems mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren von A, und lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Wir berechnen die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (7-\lambda)(-8-\lambda) + 50 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3 \end{aligned}$$

Es gilt

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Da die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Gleichungen $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$ und $(A - \lambda_2 I)v_2 = 0$ erfüllen sind es Eigenvektoren. Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setzt man $t = 0$ und verwendet $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ bekommt man die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Lösung $C_1 = 1$ und $C_2 = 1$. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Matrix $e^{tA}, t \geq 0$.

Lösung: Aus a) erhält man

$$A = TDT^{-1} \quad \text{mit } T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = [v_1 v_2] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Da $T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \begin{pmatrix} T_{22} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ erhält man

$$e^{tA} = Te^{tD}T^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{-3t} & -2e^{2t} + 2e^{-3t} \\ e^{2t} - e^{-3t} & -e^{2t} + 2e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

c) Berechnen Sie mithilfe von b) die Lösung des Anfangswertproblem $y' = Ay$ mit $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ erneut und vergleichen Sie mit a).

Lösung: Für alle $t \geq 0$ gilt

$$y(t) = e^{At}y(0) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{-3t} & -2e^{2t} + 2e^{-3t} \\ e^{2t} - e^{-3t} & -e^{2t} + 2e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} + e^{-3t} \\ e^{2t} + e^{-3t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wie in b).

4. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0. \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(t)$ von (1).
Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Die Nullstellen sind 1 (doppelt) und 2 (einfach). Also bilden die Funktionen

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = te^t, \quad y_3(t) = e^{2t} \tag{2}$$

ein Fundamentalsystem für (1), und die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{2t}, \text{ für } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

b) Geben Sie die Begleitmatrix zu (1) an und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das DGL-System $Y'(t) = AY(t)$.
Lösung: Wir bestimmen die Begleitmatrix wie in Serie 3 Aufgabe 2b. Es gilt $y''' = 2y - 5y' + 4y''$ und somit

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = AY(t), \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wie in Serie 3 Aufgabe 2d setzen wir $Y_n(t) = \begin{pmatrix} y_n(t) \\ y_n'(t) \\ y_n''(t) \end{pmatrix}$ für $n = 1, 2, 3$ mit y_n aus (2), also

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) \begin{pmatrix} te^t \\ e^t + te^t \\ e^t + e^t + te^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \end{pmatrix}, \quad Y_3(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Diese Lösungen sind linear unabhängig da für die zugehörige Wronskideterminante gilt

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & t+1 & 2 \\ 1 & t+2 & 4 \end{pmatrix} e^te^te^{2t} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} e^{4t} = (4-4+2-1)e^{4t} = e^{4t},$$

wobei wir für die Berechnung der Determinante t mal die erste Spalte von der zweiten Spalte subtrahiert und dann in der ersten Zeile entwickelt haben.