D-HEST,
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Mathematik III

HS 2015

Lösung 5

Im nächsten Teil der Vorlesung betrachten wir die Beschreibung von natürlichen Vorgängen mit Hilfe von mathematischen Modellen.

Bearbeiten Sie bitte folgende Fragen **online bis Dienstag, den 27.10.2015**.

Bitte wenden!

1. Durch Blutdurchfluss mit Durchflussrate k_{BL} gelangt ein Medikament M mit der Konzentration $C_{in,M}$ in ein Organ O. Dort reagiert M mit der Rate k_{MB} zum Stoff B. Letzterer wird mit der Rate k_B in O abgebaut.

Angenommen, die Konzentrationen C_M und C_B von M und B seien durch folgendes System beschrieben:

$$\left\{ \begin{array}{ccr} C'_M & = & k_{BL}C_{in,M} - (k_{MB} + k_{BL})C_M \\ C'_B & = & k_{MB}C_M - (k_B + k_{BL})C_B \end{array} \right\}$$

und die Werte sind

- $C_{in,M} = 1000\frac{mg}{m^3}$
- $k_{BL} = 0.1\frac{1}{min}$
- $k_B = 0.7\frac{1}{min}$
- $k_{MB} = 0.4\frac{1}{min}$

Welche stationären Konzentrationen C_M^∞ und C_B^∞ werden sich im Laufe der Zeit einstellen?

(a) $C_M^\infty = 100\frac{mg}{m^3}$

√ (b) $C_M^\infty = 200\frac{mg}{m^3}$

√ (c) $C_B^\infty = 100\frac{mg}{m^3}$

(d) $C_B^\infty = 200\frac{mg}{m^3}$

(e) Es gibt keine stationäre Konzentrationen.

Setzen wir die erste Gleichung $C'_M = 0$ und lösen $0 = k_{BL}C_{in,M} - (k_{MB} + k_{BL})C_M^\infty$ nach C_M^∞ auf, erhalten wir mit den gegebenen Werten $C_M^\infty = 200\frac{mg}{m^3}$.

Mit diesem C_M^∞ erhalten wir in der zweiten Gleichung $0 = k_{MB}C_M^\infty - (k_B + k_{BL})C_B^\infty$. Aufgelöst ist dies $C_B^\infty = 100\frac{mg}{m^3}$.

Siehe nächstes Blatt!

2. Wäsche an der Leine trocknet mit einer Geschwindigkeit, die proportional zur noch vorhandenen Feuchtigkeit F ist, $F' = -\lambda F$, wobei $\lambda > 0$ konstant. Für Wäsche, die in einem warmen Keller aufgehängt ist, nehmen wir $\lambda = 0.5/\text{Stunde}$ an. Wie lange dauert es in diesem Fall, bis ein Laken nur noch ein Tausendstel seiner ursprünglichen Feuchtigkeit hat?

(a) Das hängt von der ursprünglichen Feuchtigkeit ab.

(b) Etwa 3.5 Stunden.

(c) Etwa 7 Stunden.

√ (d) Etwa 14 Stunden.

(e) Etwa einen Tag.

(f) Etwa eine Woche.

(g) Weiss ich nicht.

Ist $F(0)$ die ursprünglichen Feuchtigkeit, so gilt $F(t) = F(0)e^{-\lambda t}$. Aus

$$\frac{1}{1000} = \frac{F(0)e^{-\lambda t}}{F(0)} = e^{-\lambda t} \qquad \text{folgt} \qquad t = \frac{\ln 1000}{0.5} \approx \frac{7}{0.5} = 14.$$

Bitte wenden!

3. Das Wachstum einer Population unter kann näherungsweise durch die Differentialgleichung

$$f'(t) = 0,0006 \cdot (350 - f(t)) \cdot f(t)$$

beschrieben werden. Dabei bezeichnet $f(t)$ die Anzahl zur Zeit t in Tagen. Für welche Zahlen $a > 0$ ist die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{350}{a \cdot e^{-0,21t} + 1}$$

eine Lösung der Differentialgleichung?

$\surd$ (a) Für $a = \ln 350$.

$\surd$ (b) Für $a = -\ln(|-0,21|)$.

$\surd$ (c) Für $a = 0,21$.

$\surd$ (d) Für $a = e^{0,21}$.

(e) Weiss ich nicht.

Wir berechnen zunächst die Ableitung der angegebenen Funktion.
Zum Beispiel mit Hilfe der Quotientenregel folgt

$$f'(t) = \frac{350 \cdot 0,21 \cdot a \cdot e^{-0,21 \cdot t}}{(ae^{-0,21 \cdot t} + 1)^2} = \frac{73,5 \cdot a \cdot e^{-0,21 \cdot t}}{(ae^{-0,21 \cdot t} + 1)^2}.$$

Jetzt setzen wir die angegebene Funktion in die rechte Seite der DGL ein und erhalten

$$0,0006 \cdot \left(350 - \frac{350}{ae^{-0,21 \cdot t} + 1}\right) \cdot \frac{350}{ae^{-0,21 \cdot t} + 1} = \frac{73,5 \cdot a \cdot e^{-0,21 \cdot t}}{(ae^{-0,21 \cdot t} + 1)^2} = f'(t).$$

Also ist die angegebene Funktion für jedes $a > 0$ eine Lösung der DGL.

Siehe nächstes Blatt!

4. Eine chemische Reaktion

Eine chemische Reaktion zweiter Ordnung beinhaltet die Wechselwirkung (Kollision) von einem Molekül der Substanz P mit einem Molekül der Substanz Q, woraus ein Molekül einer neuen Substanz X hervorgeht. Dies ist durch folgende Schreibweise wiedergegeben: $P + Q \to X$.

Nehmen wir an, dass p und q, die jeweiligen Anfangskonzentrationen von P und Q sind und $x(t)$ die Konzentration von X zur Zeit $t \geq 0$ ist.

Dann sind $p - x(t)$ und $q - x(t)$ die jeweiligen Konzentrationen von P und Q zur Zeit t, und die Reaktionsgeschwindingkeit wird durch die Differentialgleichung:

$$\dot{x}(t) = \alpha(p - x(t))(q - x(t)) \tag{1}$$

gegeben, wobei α eine positive Konstante ist.

a) Es seien $x(0) = 0$ und $p \neq q$. Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit Trennung der Variablen. Bestimmen Sie für die Lösungsfunktion $t \mapsto x(t)$ Definitionsbereich und Grenzwert von x für $t \to \infty$.

Trennung der Variablen:

$$\frac{dx}{(p-x)(q-x)} = \alpha dt.$$

Unter der Annahme $p \neq q$ folgt:

$$\frac{dx}{(p-x)(q-x)} = \frac{1}{q-p}\frac{dx}{p-x} + \frac{1}{p-q}\frac{dx}{q-x} = \alpha dt,$$

und daraus folgt:

$$\ln\left(\frac{p-x}{q-x}\right) = \alpha(p-q)t + C,$$

wobei C eine zu findende Konstante ist. Die linke Seite der obigen Gleichung ist wohldefiniert, d.h. $\frac{p-x}{q-x} > 0$, da in der Problemstellung p und q grösser als x sind. Mit Hilfe der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ ist:

$$C = \ln\left(\frac{p}{q}\right).$$

Durch Auflösen nach x ist die Lösung zum gegebenen Anfangswertproblem:

$$x(t) = q\frac{pe^{\alpha(p-q)t} - p}{pe^{\alpha(p-q)t} - q}.$$

Der Definitionsbereich von der Lösung ist die Menge der Punkte, für die gilt:

$$pe^{\alpha(p-q)t} - q \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \frac{\ln(q/p)}{\alpha(p-q)}.$$

Falls $p > q$, dann folgt $\ln(q/p) < 0$ und da nach Annahme $t \geq 0$, ist die Lösung in $\{t \geq 0\}$ überall definiert. In diesem Fall gilt zudem:

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha(p-q)t} = \infty,$$

woraus folgt:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = q.$$

Im Fall $p < q$ ist $\ln(q/p) > 0$ aber $p - q < 0$ somit ist wiederum $x(t)$ für alle $t \geq 0$ wohldefiniert. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} e^{\alpha(p-q)t} = 0,$$

woraus folgt:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = p.$$

b) Wenn es sich bei P und Q um die gleichen Substanzen handelt, dann ist $p = q$, und Gleichung (1) wird ersetzt durch:

$$\dot{x}(t) = \alpha(p - x(t))^2.$$

Lösen sie die unter a) gestellten Aufgaben für diese Situation.

Die Differentialgleichung lösen wir wieder mit Trennung der Variablen:

$$\frac{dx}{(p-x)^2} = \alpha dt \Leftrightarrow \frac{1}{p-x} = \alpha t + C.$$

Die Konstante C berechnet sich mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$:

$$C = \frac{1}{p}.$$

Durch Auflösen nach x erhalten wir für die Lösung des Anfangswertproblems:

$$x(t) = \frac{p^2\alpha t}{p\alpha t + 1}.$$

Da p, α beide positiv sind, ist $x(t)$ für $t \geq 0$ wohdefiniert. Eine direkte Berechnung liefert den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = p.$$