D-HEST,
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Mathematik III

HS 2015

Lösung 6

Bitte wenden!

1. Ein simples Populationsmodell

Man betrachte ein biologisches Populationsmodell, bei welchem die Grösse $y(t)$ der Population zur Zeit $t \geq 0$ gegeben ist durch die (eindeutige) Lösung der Differentialgleichung

$$y' = wy - sy^2, \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \tag{1}$$

für gegebene Parameter $w, s > 0$ und Anfangspopulation $y_0 \geq 0$. Die Interpretation ist wie folgt: unter Vernachlässigung des zweiten Terms ist die Wachstumsrate y' proportional zur Anzahl y der Individuen mit Proportionalitätsfaktor w (genannt Wachstumskonstante). Der zweite Term modelliert die Tatsache, dass sich bei zunehmender Population die Individuen durch (Zweier-)stösse gegenseitig behindern und das Wachstum damit gehemmt wird (s heisst in diesem Zusammenhang Stossparameter).

a) Für welche Werte von $y_0 \geq 0$ (in Abhängigkeit von w und s) ist die Lösung des Anfangswertproblems (1) zeitlich konstant, i.e. $y'(t) = 0$ für alle $t \geq 0$?

Aus (1) sieht man sofort, dass $y' = sy(\frac{w}{s} - y)$ gilt, mit konstanten Lösungen $y = 0$ und $y = \frac{w}{s}$.

b) Bestimmen Sie die Lösung von (1) (in Abhängigkeit von w und s) für gegebene Anfangspopulation y_0 mit $0 < y_0 < \frac{w}{s}$ und interpretieren Sie Ihre Lösung.

Hinweis: Es gilt $\frac{a}{y(a-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{a-y}$ für beliebige $a \in \mathbb{R}$, $y \neq 0, a$).

Die gegebene Differentialgleichung ist separierbar. Man erhält also:

$$\int \frac{\frac{w}{s}}{y\left(\frac{w}{s} - y\right)} \mathrm{d}y = \int w \mathrm{d}t \tag{2}$$

und unter Verwendung des Hinweises (mit $a = \frac{w}{s}$):

$$wt + C = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{w}{s} - y}\right) \mathrm{d}y = \log|y| - \log\left|\frac{w}{s} - y\right| \tag{3}$$

für gewisses $C \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ ergibt sich, dass $C = \log|y_0| - log\left|\frac{w}{s} - y_0\right|$, also gilt:

$$wt = \log\left|\frac{y}{y_0}\right| - \log\left|\frac{\frac{w}{s} - y}{\frac{w}{s} - y_0}\right| . \tag{4}$$

Weil $y_0 \in (0, \frac{w}{s})$ ist, folgt aus Eindeutigkeit, dass die gesuchte Lösungsfunktion $y(t)$ die Achsen $y = 0$ und $y = \frac{w}{s}$ nicht schneiden darf, i.e. $0 < y(t) < \frac{w}{s}$ muss für alle $t \geq 0$ gelten. Die Terme zwischen den Betragsstrichen in (4) sind daher

Siehe nächstes Blatt!

stets positiv, und man darf deswegen die Betragsstriche weglassen. Aus (4) folgt nun:

$$e^{wt} = \frac{\frac{y}{y_0}}{\frac{\frac{w}{s}-y}{\frac{w}{s}-y_0}} \tag{5}$$

und Auflösen nach y ergibt die gesuchte Lösung:

$$y(t) = \frac{w}{s}\frac{y_0}{y_0 - (y_0 - \frac{w}{s})e^{-wt}} \tag{6}$$

für $t \geq 0$. Die Funktion $y(t)$ ist für $0 < y_0 < \frac{w}{s}$ monoton wachsend, das heisst, die Anfangspopulation y_0 ist so niedrig, dass das Wachstum überwiegt. Bei zunehmender Population fällt jedoch die gegenteilige Stosswirkung immer mehr ins Gewicht und im Limes $t \to \infty$ konvergiert die Funktion $y(t)$ gegen die (Gleichgewichts-)lösung $y = \frac{w}{s}$ (In diesem Zustand machen sich die gegenteiligen Einflüsse gerade wett).

c) Was geschieht im Fall $y_0 > \frac{w}{s}$?

Man vergewissert sich leicht, dass in diesem Fall die Lösung ebenfalls durch (6) gegeben ist. Die Funktion ist aber nunmehr monoton fallend, weil die Anfangspopulation y_0 zu hoch ist, und die (negativ beeinflussende) Stosswirkung überwiegt. Es gilt weiterhin $\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{w}{s}$. Man spricht in diesem Zusammenhang von einem sogenannten *stabilen* Gleichgewicht.

Bitte wenden!

2. Lotka Volterra mit zwei Beutetieren

Ein Student der Biologie studiert das Verhalten von Luchsen (Räuber, L) und deren Wechselwirkung mit der Rehpopulation (Beute, R) im Schweizer Jura. Zum besseren Verständnis konstruiert er ein Modell nach Lotka-Volterra, welches die zeitliche Entwicklung beider Spezies beschreibt mit der Zusatzannahme, dass die Biomasse der gefressenen Rehe verlustfrei in Luchsbiomasse umgewandelt wird. L und R seien dimensionslose Grössen. Bezeichnungen und Werte:

- Wachstumsrate der Rehe k_1, Sterberate der Luchse k_2.
- Proportionalitätsfaktor k_3 der Begegnungen L und R (d.h. der Faktor k_3RL beschreibt die Rehe welche gefressen werden).
- Zahlenwerte: $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.02$, $k_3 = 0.002$, $k_4 = 0.03$, $k_5 = 0.001$.

a) Helfen Sie dem Studenten: Stellen Sie das DGL-System auf und zeichnen Sie ein Boxschema des Systems (Kompartiment-Modell).

$$\xrightarrow{\quad k_1R \quad} \boxed{R} \xrightarrow{\quad k_3RL \quad} \boxed{L} \xrightarrow{\quad k_2L \quad}$$

Das System lautet:

$$g(R) = \frac{dR}{dt} = k_1R - k_3RL$$
$$h(L) = \frac{dL}{dt} = k_3RL - k_2L$$

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte des Systems.

Die Fixpunkte des Systems ergeben sich durch Nullsetzen der linken Seite der DGLn.

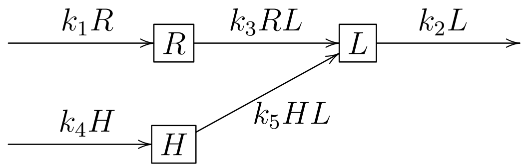
- Trivialer Fixpunkt: $L = R = 0$.
- Nicht-trivialer Fixpunkt: $L, R \neq 0$: $L^\infty = \frac{k_1}{k_3} = 25$, $R^\infty = \frac{k_2}{k_3} = 10$.

c) Nach einer Analyse des Mageninhalts eines jurassischen Luchses bemerkt der Student, dass Luchse auch manchmal Feldhasen fressen. Er ändert das Modell und bittet Sie noch einmal um Hilfe.

Führen Sie eine zweite Beute H mit der Wachstumsrate k_4 ein, welche durch den Luchs mit k_5HL gefressen wird.

Siehe nächstes Blatt!

Wie sieht das modifizierte Modell aus, wie lauten die modifizierten Gleichungen?



Die neuen Gleichungen lauten:

$$\frac{dR}{dt} = k_1R - k_3RL$$
$$\frac{dH}{dt} = k_4H - k_5HL$$
$$\frac{dL}{dt} = k_3RL + k_5HL - k_2L$$

d) Berechnen Sie die neuen Fixpunkte des Systems.

Die Fixpunkte des Systems lauten:

- Trivialer Fixpunkt $R = H = L = 0$.
- Nicht-triviale Fixpunkte:
  - Falls $R \neq 0$: $L_1^\infty = \frac{k_1}{k_3} = 25$
  - Falls $H \neq 0$: $L_2^\infty = \frac{k_4}{k_5} = 30$

  Da diese Gleichungen nicht gleichzeitig erfüllt sein können, gibt es offenbar keinen Fixpunkt, an dem sowohl $R > 0$ als auch $H > 0$. Also berechnen wir beide Fixpunkte zu:

$$R \neq 0, H = 0: \; L_1^\infty = \frac{k_1}{k_3} = 25, \qquad R^\infty = \frac{k_2}{k_3} = 10, \qquad H^\infty = 0,$$
$$R = 0, H \neq 0: \; L_2^\infty = \frac{k_4}{k_5} = 30, \qquad H^\infty = \frac{k_2}{k_5} = 20, \qquad R^\infty = 0.$$

Bitte wenden!

3. Medikamentenmenge im Blut

Für ein Medikament sei folgendes 2-Box-Kompartiment-Modell mit $0 < b < 1$ gegeben:

$$\boxed{\text{Blut}} \xrightarrow{\;\;b\;\;} \boxed{\text{Leber}}$$

Dies bedeutet, dass das Medikament mit einer Rate proportional zur Medikamentenmenge im Blut (und Proportionalitätskonstante b) in die Leber fliesst. Zur Zeit $t \geq 0$ sei die Medikamentenmenge im Blut $y_1(t)$, in der Leber sei sie $y_2(t)$.

a) Zu Beginn $t = 0$ sei die Menge im Blut gleich $y_{1,0}$ und in der Leber gleich 0. Bestimmen Sie die Entwicklungen der Medikamentenmengen:

$$t \mapsto y_1(t), \quad t \mapsto y_2(t)$$

und skizzieren Sie die zugehörigen Funktionsgraphen für $y_{1,0} = 10$ und $b = \frac{1}{2}$.

Wir stellen die Differentialgleichungen auf:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -by_1(t), \quad y_1(0) = y_{1,0}, \\ y_2'(t) &= by_1(t), \quad y_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für y_1 lautet $y_1(t) = Ce^{-bt}$, die Anfangsbedingung $y_1(0) = y_{1,0}$ liefert $C = y_{1,0}$, das heisst:

$$y_1(t) = y_{1,0}e^{-bt}.$$

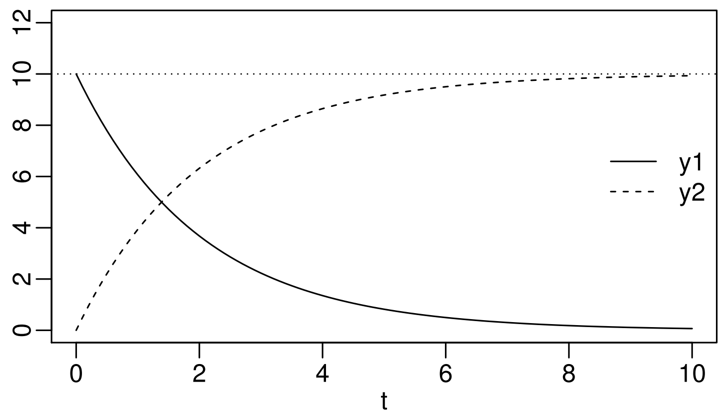
Für y_2 folgt:

$$y_2'(t) = by_1(t) = by_{1,0}e^{-bt}.$$

Durch Integration ergibt sich $y_2(t) = -y_{1,0}e^{-bt} + D$. Einsetzen der Anfangsbedingung $y_2(0) = 0$ liefert $D = y_{1,0}$ und somit:

$$y_2(t) = y_{1,0}(1 - e^{-bt}).$$

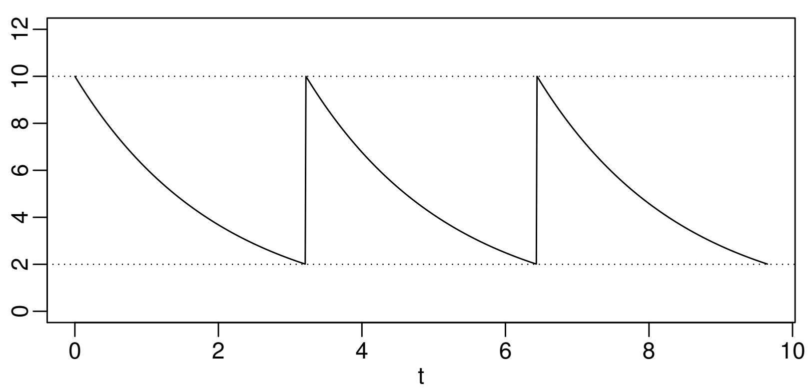
Siehe nächstes Blatt!



b) Um eine Mindestmenge $y_{1,1}$ im Blut mit $0 < y_{1,1} < y_{1,0}$ zu sichern, müssen wir die Infusion mit $y_{1,0}$ periodisch wiederholen. Bestimmen Sie die Periode in Abhängigkeit von b, $y_{1,0}$, $y_{1,1}$ (das heisst bestimmen Sie die Zeit nachdem die Mindestmenge $y_{1,1}$ erreicht wird) und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

Auflösen nach T liefert:

$$y_1(T) = y_{1,0}e^{-bT} \overset{!}{=} y_{1,1} \quad \Rightarrow e^{-bT} = \frac{y_{1,1}}{y_{1,0}} \quad \Rightarrow T = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{y_{1,0}}{y_{1,1}}\right).$$



c) Wir nehmen nun an, dass wir eine konstante Blutinfusion $g > 0$ haben. Zu Beginn sei in beiden Kompartimenten die Medikamentenmenge gleich 0.

1. Zeichnen Sie das zugehörige Kompartiment-Modell, bestimmen Sie die Entwicklungen $t \mapsto y_1(t), t \mapsto y_2(t)$ und skizzieren Sie die zugehörigen Funktionsgraphen für $g = 10$ und $b = \frac{1}{2}$.

   Das neue Modell ist wie folgt:

   $$g \longrightarrow \boxed{\text{Blut}} \xrightarrow{b} \boxed{\text{Leber}}$$

Bitte wenden!

Für y_1 ergibt sich die Gleichung:

$$y_1'(t) = g - by_1(t) \tag{7}$$

mit der Anfangsbedingung $y_1(0) = 0$. Diese Gleichung hat konstante Koeffizienten, und der Ansatz $y_1 =$ konstant liefert die stationäre Lösung $y_1(t) = g/b$. Die Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung lauten Ce^{-bt}, und somit erhalten wir als Lösungen von (7):

$$y_1(t) = Ce^{-bt} + \frac{g}{b}.$$

Damit die Anfangsbedingung $y_1(0) = 0$ erfüllt ist, muss $C = -g/b$ gelten, und somit:

$$y_1(t) = \frac{g}{b}(1 - e^{-bt}).$$

Alternativ kann man auch die Methode der Variation der Konstanten verwenden um (7) zu lösen und erhält

$$y_1(t) = Q(t)e^{-bt}.$$

Dies setzen wir nun wieder in die Gleichung (7) ein und lösen nach $Q(t)$ auf:

$$y_1'(t) = Q'(t)e^{-bt} - by_1(t) \quad \Rightarrow Q'(t) = ge^{bt} \quad \Rightarrow Q(t) = \frac{g}{b}e^{bt} + D \quad \Rightarrow y_1(t) = \frac{g}{b} + De^{-bt}.$$

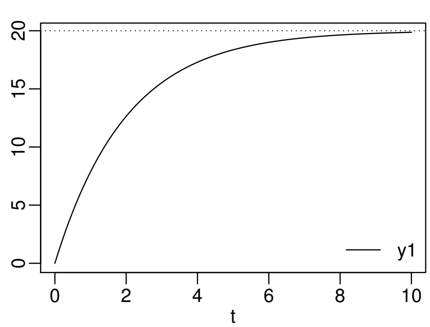
Da die Anfangsbedingung $y_1(0) = 0$ erfüllt sein muss folgt $D = -g/b$, und somit insgesamt wie zuvor:

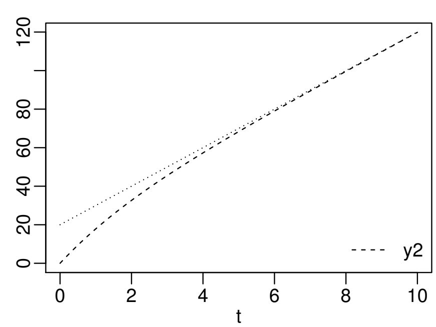
$$\boxed{y_1(t) = \tfrac{g}{b}(1 - e^{-bt})}.$$

Für y_2 erhalten wir:

$$y_2'(t) = g(1 - e^{-bt}) \quad \Rightarrow y_2(t) = g\int (1 - e^{-bt})dt = gt + \frac{g}{b}e^{-bt} + C$$

$$y_2(0) = 0 \Rightarrow \boxed{y_2(t) = gt + \tfrac{g}{b}(e^{-bt} - 1)}.$$





Siehe nächstes Blatt!

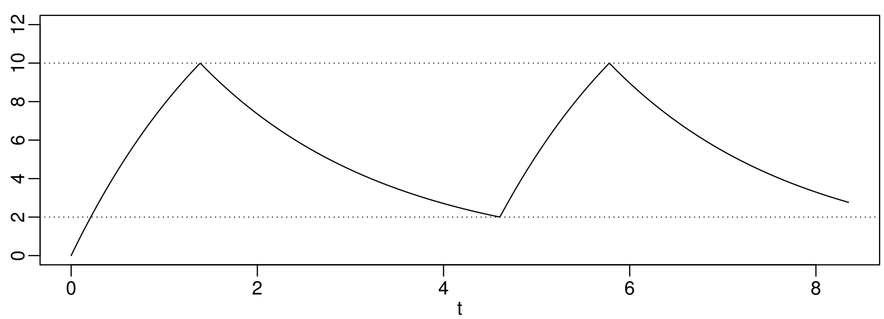
2. Angenommen, wir unterbrechen die Infusion bei $t = T_1$ mit einer Menge im Blut Y_1. Bestimmen Sie den Verlauf für $t \geq T_1$. Um eine Mindestmenge von Y_2 im Blut zu garantieren, starten wir die Infusion wieder zum Zeitpunkt T_2 (an dem gilt $y_1(T_2) = Y_2$). Bestimmen Sie T_2 und skizzieren Sie den Verlauf zwischen Y_1 und Y_2.

   Die Infusion wird unterbrochen, wenn $y_1(T_1) = \frac{g}{b}(1-e^{-bT}) \stackrel{!}{=} Y_1$. Für $t \geq T_1$ ist $g = 0$ und somit entwickelt sich das System wie bei a) mit Anfangskonzentration Y_1:

$$y_1(t) = Y_1 e^{-b(t-T_1)} .$$

   Starten wir wieder bei T_2 für die Mindestmenge Y_2, ist:

$$Y_2 = Y_1 e^{-b(T_2-T_1)} \Rightarrow e^{b(T_2-T_1)} = \frac{Y_1}{Y_2} \Rightarrow T_2 = T_1 + \frac{1}{b} \ln\left(\frac{Y_1}{Y_2}\right) .$$



Bitte wenden!

4. Muskel, Blut und Leber

Gegeben sei folgendes 3-Box-Kompartiment-Modell für $0 < a, b, c < 1$:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Muskel}} \arrow[r, "a"'] & \boxed{\text{Blut}} \arrow[r, "b"'] & \boxed{\text{Leber}} \arrow[l, bend right, "c"'] \end{tikzcd}$$

a) Stellen Sie das zugehörige DGL-System $y' = Ay$ auf, welches die Entwicklung einer Substanz in den Kompartimenten beschreibt.

Wir bezeichnen mit $y_1(t)$, $y_2(t)$ und $y_3(t)$ die Menge der Substanz in Muskel, Blut und Leber zur Zeit t. Dann erfüllt die Funktion $t \mapsto y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^\top \in \mathbb{R}^3$

$$y' = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -b & c \\ 0 & b & -c \end{pmatrix} y.$$

b) Zeigen Sie, dass es einen stationären Zustand gibt, das heisst, eine von Null verschiedene Lösungsfunktion $\{t \mapsto y^\infty(t)\}$, welche nicht von t abhängt.

Das charakteristische Polynom ist $p_A(\lambda) = (-a-\lambda)((-b-\lambda)(-c-\lambda) - bc)$. Eine der Nullstellen (Eigenwerte) ist $\lambda = 0$. Mit einem dazugehörigen Eigenvektor $v \neq 0$ ist $\{t \mapsto y^\infty(t) = e^{0t}v = v\}$ eine von t unabhängige Lösung, ein stationärer Zustand.

c) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ für $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{2}{3}$.

Die Matrix:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte $\lambda_{1,2,3} = -1, -\frac{2}{3}, 0$ mit Eigenvektoren:

$$(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die drei Eigenwerte einfach sind (sie sind alle paarweise verschieden), ergibt sich mit den drei linear unabhängigen Eigenvektoren ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$:

$$\left\{ t \mapsto e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto e^{-2t/3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Siehe nächstes Blatt!

d) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = (1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$ und $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}$.

Hinweis: Betrachten Sie $J = T^{-1}AT$ mit den Matrizen:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -\frac{2}{3}, 0$, mit dem doppelten Eigenwert $-\frac{2}{3}$. Wir folgen dem Hinweis und berechnen $J = T^{-1}AT$. Es gilt:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit:

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Dies ist die so genannte Jordan-Normalform von A.) Damit gilt $A = TJT^{-1}$, $A^2 = TJT^{-1}TJT^{-1} = TJ^2T^{-1}$ und allgemein $A^n = TJ^nT^{-1}$, für $n \geq 0$ und daher:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} TJ^nT^{-1} = T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tJ)^n\right)T^{-1} = Te^{tJ}T^{-1}.$$

Um e^{tJ} zu berechnen, schreiben wir $J = J_1 + J_2$ mit:

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $J_1J_2 = J_2J_1$, und dass $J_2^2 = 0$, also folgt, dass:

$$e^{tJ_1} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2}{3}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2}{3}t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad e^{tJ_2} = E + tJ_2 = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= Te^{tJ}T^{-1} = Te^{tJ_1}e^{tJ_2}T^{-1} \\
&= Te^{-\frac{2}{3}t}\begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2}{3}t} \end{pmatrix} T^{-1} \\
&= \frac{e^{-2t/3}}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2t+3(e^{2t/3}-1) & 3(e^{2t/3}+1) & 3(e^{2t/3}-1) \\ -2t+3(e^{2t/3}-1) & 3(e^{2t/3}-1) & 3(e^{2t/3}+1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung y des gegebenen Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{tA}y(0) \\
&= \frac{e^{-2t/3}}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2t+3(e^{2t/3}-1) & 3(e^{2t/3}+1) & 3(e^{2t/3}-1) \\ -2t+3(e^{2t/3}-1) & 3(e^{2t/3}-1) & 3(e^{2t/3}+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{e^{-2t/3}}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 2t-3(e^{\frac{2t}{3}}+1) \\ -2t-3(e^{\frac{2t}{3}}+1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Der Unterschied, ob A diagonalisierbar ist oder nicht, spiegelt sich qualitativ jeweils im Konvergenzverhalten einer Lösungsfunktion wieder:

- Ist A diagonalisierbar, wird das Konvergenzverhalten einer Lösungsfunktion durch $e^{-\alpha t}$ beschrieben.
- Ist A nicht diagonalisierbar, wird das Konvergenzverhalten einer Lösungsfunktion durch $t \cdot e^{-\alpha t}$ beschrieben, oder allgemeiner durch $q(t) \cdot e^{-\alpha t}$ mit $q(t)$ einem Polynom in t.