D-HEST, Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Mathematik III

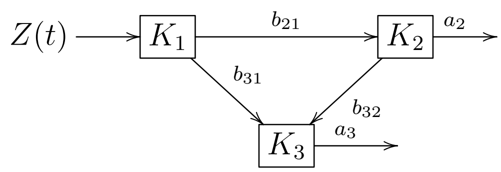
HS 2015

Lösung 7

Bitte wenden!

1. Drei-Kompartiment-System

Gegeben sei ein 3-Kompartiment-System mit einer Zufuhr $t \mapsto Z(t)$:



Im Kompartiment K_i haben wir Menge $y_i(t)$, und alle Raten sind positiv. Die Entwicklung in dem Modell wird beschrieben durch:

$$y'(t) = A \cdot y(t) + g(t)$$

für $t \geq 0$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} -(b_{31}+b_{21}) & 0 & 0 \\ b_{21} & -(a_2+b_{32}) & 0 \\ b_{31} & b_{32} & -a_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g(t) = \begin{pmatrix} Z(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Seien alle Raten gleich $\frac{1}{2}$ und die Zufuhr konstant gleich 2. Zeigen Sie, dass es einen stationären Zustand gibt und berechnen Sie diesen.

Es sind $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Es gibt einen stationären Zustand y_∞ genau dann, wenn y' konstant $= 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn:

$$A \cdot y + g = 0 \implies A \cdot y = -g$$

Da A invertierbar ist, ist $y_\infty = -A^{-1} \cdot g = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Seien die Zufuhr $Z(t) = e^{-t}$, $a_2 = a_3 = b_{31} = b_{21} = \frac{1}{2}$ und $b_{32} = \frac{1}{4}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems.

Hinweis: Prüfen Sie, dass $T^{-1}AT = D$ für eine geeignete Diagonalmatrix D und mit:

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und betrachten Sie $x(t) = T^{-1}y(t)$.

Siehe nächstes Blatt!

Es ist $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ diagonalisierbar mit:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = D\,.$$

Setzte $x(t) = T^{-1}y(t)$ also $y(t) = Tx(t)$ und $y'(t) = Tx'(t)$

$$\begin{aligned} y'(t) = A \cdot y(t) + g(t) &\implies Tx'(t) = A \cdot Tx(t) + g(t) \\ \implies x'(t) &= (T^{-1}AT) \cdot x(t) + T^{-1}g(t) = D \cdot x(t) + h(t), \end{aligned}$$

wobei $h(t) = T^{-1}g(t) = e^{-t}(-2,-2,2)^\top = e^{-t}k$. Da D diagonal ist, sind die DGLen entkoppelt. Diese haben die Form $x_i'(t) = \lambda_i x_i(t) + k_i e^{-t}$, und können mittels Variation der Konstanten gelöst werden.

Ansatz: $x_i(t) = C(t)e^{\lambda_i t}$.

$$\begin{aligned} (C'(t) + \lambda_i C(t))e^{\lambda_i t} &= \lambda_i C(t)e^{\lambda_i t} + k_i e^{-t} \\ C'(t)e^{\lambda_i t} &= k_i e^{-t} \\ C'(t) &= k_i e^{-(1+\lambda_i)t} \\ \text{falls } 1+\lambda_i \neq 0\text{:} \quad C(t) &= -\frac{k_i}{1+\lambda_i} e^{-(1+\lambda_i)t} + const. \\ x_i(t) &= -\frac{k_i}{1+\lambda_i} e^{-t} + c_i e^{\lambda_i t} \\ \text{falls } 1+\lambda_i = 0\text{:} \quad C(t) &= k_i t + const. \\ x_i(t) &= k_i t e^{-t} + c_i e^{\lambda_i t} \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} -2te^{-t} + c_1 e^{-t} \\ 8e^{-t} + c_2 e^{-3t/4} \\ -4e^{-t} + c_3 e^{-t/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2t \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t/4} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2}. \end{aligned}$$

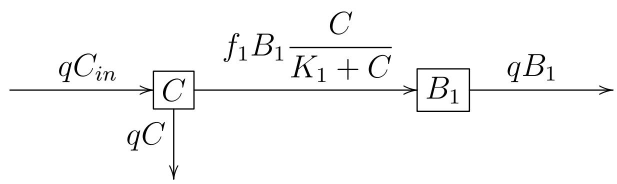
Mit $y(t) = Tx(t)$ haben wir nun:

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} te^{-t} - c_1 e^{-t}/2 \\ -(2t+8)e^{-t} + c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t/4} \\ 4e^{-t} + c_2 e^{-3t/4} + c_3 e^{-t/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ -2t-8 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-t} + c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t/4} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

2. Wachstum von Phytoplankton im Chemostat

Im Mikrobiologielabor wächst ein Stamm einer Phytoplanktonart der Coccolithophoren (Emiliania huxleyi, RCC1256, hier: B_1) in der Konzentration B_1 in einem Chemostat (Bioreaktor). Wir nehmen an, dass das Wachstum von E. huxleyi von der Konzentration einer Nährstofflösung C abhängig sei, wobei C mittels Michaelis-Menten-Funktion mit der Rate $f_1 B_1$ aufgenommen werde. Dabei werde B_1 in den gleichen Einheiten ausgedrückt wie C, d.h. aus einer Einheit C entstehe eine Einheit des Organismus B_1. Die Wasseraustauschrate durch den Reaktor sei q [h^{-1}], die Nährstoffkonzentration im Zufluss sei C_{in}, die Coccolithophorenkonzentration $B_{1,in}$ $= 0$. Die Ausschwemmung betreffe C und B_1 gleichermassen. Das zugehörige nicht lineare Kompartiment-Modell sieht dann so aus:



a) Stellen Sie das zugehörige System von DGL für C und B_1 auf.

$$\frac{dB_1}{dt} = f_1 B_1 \frac{C}{K_1 + C} - qB_1 \tag{1}$$

$$\frac{dC}{dt} = qC_{in} - qC - f_1 B_1 \frac{C}{K_1 + C} \tag{2}$$

b) Berechnen Sie die Fixpunkte (C^∞, B_1^∞). Mit den Zahlen: $K_1 = 5$ mg m^{-3}, $q = 0.2$ h^{-1}, $f_1 = 1$ h^{-1}, $C_{in} = 2$ mg m^{-3}.

Mit dem Ansatz $C = C^\infty \in \mathbb{R}$ und $B_1 = B_1^\infty \in \mathbb{R}$ ergibt sich aus Gleichung (1)

$$0 = B_1^\infty \left(\frac{f_1 C^\infty}{K_1 + C^\infty} - q \right). \tag{3}$$

Nehmen wir zunächst an $B_1^\infty = 0$ so ist (1) erfüllt und mit (2) erhalten wir $C_1^\infty = C_{in}$, i.e.

$$1.)\ C^\infty = C_{in}, \quad B_1^\infty = 0 \qquad \text{trivialer Fixpunkt.}$$

Falls $B_1^\infty \neq 0$, so können wir in (3) durch B_1^∞ kürzen. Lösen wir diese Gleichung anschliessend nach C^∞ auf und setzen das Ergebnis in (2) ein erhalten wir den zweiten Fixpunkt

$$2.)\ C^\infty = K_1 \frac{q}{f_1 - q}, \quad B_1^\infty = C_{in} - K_1 \frac{q}{f_1 - q} = C_{in} - C^\infty.$$

Siehe nächstes Blatt!

Hinweis: Fixpunkt 2 ist nur sinnvoll, wenn $f_1 > q$ und $C_{in} > K_1 \dfrac{q}{f_1 - q}$, da sonst die Konzentration der Coccolithophoren negativ werden würde. In Zahlen: $C^\infty = 1.25$ mg m^{-3}, $B_1^\infty = 0.75$ mg m^{-3} (obige Bedingung ist erfüllt).

c) Unter der Annahme $B_1(0) \geq 0$ und $C(0) \geq 0$, was geschieht mit B_1 und C, wenn die Zuflusskonzentration C_{in} auf 1 mg m^{-3} reduziert wird?

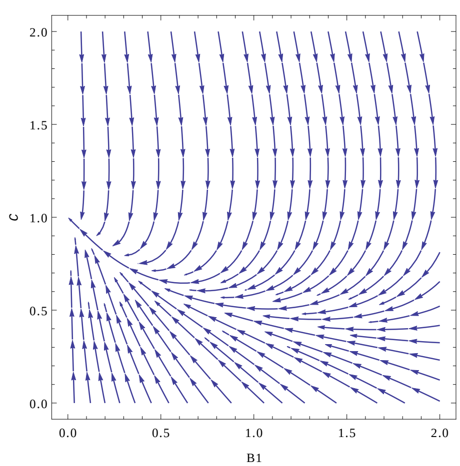
Hinweis: Skizzieren Sie das Vektorfeld der Ableitungen $(B_1', C')^\top$ im ersten Quadranten des $B_1 \times C$-Raums.

Falls $C_{in} = 1$ mg m^{-3}, ist $C_{in} < K_1 \frac{q}{f_1 - q}$, das heisst Fixpunkt 2 kann vom System (laut dem vorigen Punkt) nicht eingenommen werden. Wir illustrieren nun, dass das System bei den gegebenen Zahlenwerten, unabhängig vom Anfangszustand im ersten Quadranten (i.e. $B_1(0) \geq 0$, $C(0) \geq 0$), dem Gleichgewichtspunkt

$$(B_1^\infty, C^\infty) = (0, C_{in}) =: P \tag{4}$$

zustrebt. Das kann man z.B. so einsehen:

1. Für $C = 0$ ist $C' > 0$ (d.h. die B_1-Achse ist "abstossend")
2. Für $C > C_{in} = 1$ ist $C' < 0$ (d.h. die Lösung fliesst in diesem Bereich Richtung B_1-Achse)
3. Auf der C-Achse ist $B_1' = 0$ und $C' > 0$ für $C < C_{in}$ respektive $C' < 0$ für $C > C_{in}$. D.h. eine Lösungskurve kann die C-Achse nicht überqueren und eine Lösung auf der C-Achse nähert sich P.
4. Für $C \leq 1$ ist $B_1' < 0$ d.h. die Lösung strömt in Richtung C-Achse.

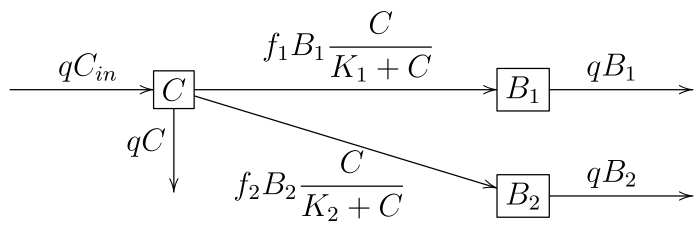


Damit lässt sich das Vektorfeld skizzieren (wie im Streamplot auf der Abbildung dargestellt), und es wird plausibel, dass sich jede Lösung, die im 1. Quadranten startet nach P bewegt.

Bitte wenden!

d) Was geschieht, wenn ins System ein zweiter Stamm von Emiliania huxleyi (RCC1212, hier: B_2) welcher wie B_1 wächst, eingebracht wird? Die Wachstumsparameter seien: $K_2 = 2\text{mg m}^{-3}$, $f_2 = 0.8h^{-1}$, $C_{in} = 2\text{mg m}^{-3}$

- Stellen Sie das Kompartiment-Modell und das DGL-System auf. *Hinweis*: Gehen Sie von obigem Kompartiment-Modell aus und erweitern Sie es um den Stamm B_2 analog zum Stamm B_1.
- Bestimmen Sie wieder die Fixpunkte $(B_1^\infty, B_2^\infty, C^\infty)$.
- Für welche (positiven) Werte der Nährstofflösung C wächst Stamm 2 besser als Stamm 1?



Das System wird erweitert um eine dritte Gleichung, welche in der Form Gleichung (1) ähnelt:

$$\frac{dB_1}{dt} = f_1 B_1 \frac{C}{K_1 + C} - qB_1, \tag{5}$$

$$\frac{dB_2}{dt} = f_2 B_2 \frac{C}{K_2 + C} - qB_2, \tag{6}$$

$$\frac{dC}{dt} = qC_{in} - qC - f_1 B_1 \frac{C}{K_1 + C} - f_2 B_2 \frac{C}{K_2 + C}. \tag{7}$$

Wir gehen analog zu oben vor und setzen die gesuchten Konstanten $B_1 = B_1^\infty \in \mathbb{R}$, $B_2 = B_2^\infty \in \mathbb{R}$ und $C = C^\infty \in \mathbb{R}$ in die Gleichungen ein. Mit dem Ansatz $B_1 = B_2 = 0$, erhalten wir unmittelbar den trivialen Fixpunkt:

$$1.)\ C^\infty = C_{in}, \quad B_1^\infty = B_2^\infty = 0.$$

Nehmen wir an $B_1 \neq 0$ und $B_2 \neq 0$ und setzen in die Gleichungen (5) und (6) ein ergibt sich mit den gegebenen Zahlenwerten der Widerspruch

$$C^\infty = \frac{qK_1}{f_1 - q} = \frac{qK_2}{f_2 - q}.$$

Es bleibt der Fall $B_i = 0$, $B_j \neq 0$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$ zu betrachten. Aus (5), (6) und (7) bekommen wir dann die weiteren Fixpunkte

$$2.) C_1^\infty = \frac{K_1 q}{f_1 - q}, \quad B_{1,1} = C_{in} - \frac{K_1 q}{f_1 - q}, \quad B_{2,1} = 0,$$

$$3.) C_2^\infty = \frac{K_2 q}{f_2 - q}, \quad B_{1,2} = 0, \quad B_{2,2} = C_{in} - \frac{K_2 q}{f_2 - q}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Da die Abflussrate q für beide Stämme zu gleichem negativen Wachstum führt, hat Stamm 2 besseres Wachstum als Stamm 1 (d.h. $B_2' > B_1'$) falls gilt

$$f_2 \frac{C}{K_2 + C} > f_1 \frac{C}{K_1 + C}. \tag{8}$$

Für $C > 0$ ist das äquivalent zu

$$C < \frac{f_2 K_1 - f_1 K_2}{f_1 - f_2}. \tag{9}$$

Setzen wir die gegebenen Zahlenwerte ein, erhalten wir dass Stamm 2 für Werte $C > 0$ schneller als Stamm 1 wächst genau dann wenn $0 < C < 10$.

Bitte wenden!

3. Laplace Transformation I

Für die gegebene Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Laplace-Transformierte*:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t := \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

sofern dieser Limes existiert. Berechnen Sie die Laplace-Transformierte folgender Funktionen:

a) Für gegebene und fixe $a, A > 0$:

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{falls} \quad 0 \le t < a \\ -A & \text{falls} \quad a \le t < 2a \\ 0 & \text{falls} \quad 2a \le t \end{cases}$$

Sei $F_\lambda(s) = \int_0^\lambda f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ und damit $F(s) = \lim_{\lambda\to\infty} F_\lambda(s)$. Für alle $\lambda \ge 2a$ gilt:

$$\begin{aligned} F_\lambda(s) &= \int_0^a Ae^{-st}\mathrm{d}t + \int_a^{2a} (-A)e^{-st}\mathrm{d}t + \int_{2a}^\lambda 0\, e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \frac{A}{s}(1 - e^{-sa}) + \frac{A}{s}(e^{-2sa} - e^{-sa}) + 0 \\ &= \frac{A}{s}(1 - e^{-sa})^2\,. \end{aligned}$$

Da diese Funktion nicht von λ abhängt, gilt insbesondere auch:

$$F(s) = \frac{A}{s}(1 - e^{-sa})^2\,.$$

b) $f(t) = 2te^{-4t}$

Mittels partieller Integration erhält man für alle $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} F_\lambda(s) = \int_0^\lambda 2te^{-(s+4)t} &= -\frac{2}{s+4}[te^{-(s+4)t}]_{t=0}^{t=\lambda} + \frac{2}{s+4}\int_0^\lambda e^{-(s+4)t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{s+4}\frac{\lambda}{e^{(s+4)\lambda}} - \frac{2}{(s+4)^2}(e^{-(s+4)\lambda} - 1)\,. \end{aligned}$$

Eine einfache Anwendung der Regel von L'Hôpital liefert, dass für beliebige $c > 0$ und Polynome P (Funktionen der Form $P(\xi) = \sum_{k=0}^n a_k\xi^k$ für fixes $n \ge 0$ und Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$, $0 \le k \le n$) gilt:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{P(\lambda)}{e^{c\lambda}} = 0$$

Siehe nächstes Blatt!

(anschaulich bedeutet dies, dass die Exponentialfunktion *schneller* wächst als jede Potenz). Dadurch ergibt sich:

$$F(s) = \lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{2}{s+4}\frac{\lambda}{e^{(s+4)\lambda}} - \frac{2}{(s+4)^2}(e^{-(s+4)\lambda}-1)\right] = 0 - \frac{2}{(s+4)^2}(0-1) = \frac{2}{(s+4)^2}\,.$$

c) $f(t) = t^3$

Nach dreimaliger partieller Integration erhält man:

$$\begin{aligned} F_\lambda(s) = \int_0^\lambda t^3 e^{-st}\mathrm{d}t &= -\frac{1}{s^3}\frac{\lambda^3 s^2 + 3\lambda^2 s + 6\lambda}{e^{\lambda s}} + \frac{6}{s^3}\int_0^\lambda e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{s^3}\frac{\lambda^3 s^2 + 3\lambda^2 s + 6\lambda}{e^{\lambda s}} - \frac{6}{s^4}(e^{-s\lambda}-1)\,. \end{aligned}$$

Der erste Summand verschwindet im Limes $\lambda\to\infty$ und man erhält:

$$F(s) = \frac{6}{s^4}\,.$$

d) $f(t) = \cos(\omega t)$ für $\omega > 0$

Wir integrieren zwei Mal partiell (alternativ kann man auch die Formel $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$ verwenden, welche unmittelbar aus der Eulerschen Identität $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ folgt). Es gilt:

$$\begin{aligned} F_\lambda(s) = \int_0^\lambda \cos(\omega t)e^{-st}\mathrm{d}t &= -\frac{1}{s}\left[\cos(\omega t)e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\lambda} - \frac{\omega}{s}\int_0^\lambda \sin(\omega t)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{s}(\cos(\omega\lambda)e^{-s\lambda}-1) + \frac{\omega}{s^2}\left[\sin(\omega t)e^{-st}\right]_{t=0}^{t=\lambda} - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\lambda \cos(\omega t)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{s}(\cos(\omega\lambda)e^{-s\lambda}-1) + \frac{\omega}{s^2}\sin(\omega\lambda)e^{-s\lambda} - \frac{\omega^2}{s^2}F_\lambda(s)\,. \end{aligned}$$

Auflösen nach $F_\lambda(s)$ ergibt:

$$F_\lambda(s) = \frac{s^2}{s^2+\omega^2}\left[-\frac{1}{s}(\cos(\omega\lambda)e^{-s\lambda}-1) + \frac{\omega}{s^2}\sin(\omega\lambda)e^{-s\lambda}\right]\,.$$

Da $|\cos x|, |\sin x| \leq 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$, hat man für alle $\omega, s > 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to\infty}\cos(\omega\lambda)e^{-s\lambda} &= 0 \\ \lim_{\lambda\to\infty}\sin(\omega\lambda)e^{-s\lambda} &= 0\,. \end{aligned}$$

Also erhält man:

$$F(s) = \frac{s^2}{s^2+\omega^s}\left[-\frac{1}{s}(0-1)+0\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

Bitte wenden!

4. Laplace Transformation II

Bestimmen Sie unter Verwendung geeigneter Transformationssätze die Laplace-Transformierte $F(s)$ mit $s > 0$ folgender Funktionen:

a) $f(t) = 4t^3 - t^2 + 2t$

Wir wissen, dass $\mathcal{L}\{t^3\}(s) = \frac{6}{s^4}$. Auf ähnliche Weise berechnet man $\mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{2}{s^3}$ und $\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}$. Mit dem Linearitätssatz folgt dann:

$$F(s) = 4\mathcal{L}\{t^3\}(s) - \mathcal{L}\{t^2\}(s) + 2\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{24}{s^4} - \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}\,.$$

b) $f(t) = (t-4)^2\,\sigma(t-4)$

Mit dem Verschiebungssatz nach rechts gilt:

$$\mathcal{L}\{(t-4)^2\}(s) = e^{-4s}\mathcal{L}\{t^2\}(s) = e^{-4s}\frac{2}{s^3}\,.$$

c) $f(t) = e^{-3t}\sin(\omega t)$ mit $\omega > 0$

Wie in der Vorlesung besprochen, gilt $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1+s^2}$ Wir verwenden nacheinander den Dämpfungssatz und den Ähnlichkeitssatz und erhalten:

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\sin(\omega t)\}(s) = \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s+3) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\sin t\}\left(\frac{s+3}{\omega}\right) = \frac{\omega}{\omega^2 + (s+3)^2}\,.$$

d) $f(t) = \cos^2(t-3)\,\sigma(t-3)$

Wir berechnen zunächst $\mathcal{L}\{\cos^2(t)\}(s)$. Da $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$ gilt, erhalten wir aus der Linearität, dass:

$$\mathcal{L}\{\cos^2(t)\}(s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{1\}(s) + \mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

wobei wir auch verwendet haben, dass $\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$. Nun ergibt sich mit dem Verschiebungssatz, dass:

$$\mathcal{L}\{\cos^2(t-3)\}(s) = e^{-3s}\mathcal{L}\{\cos^2(t)\}(s) = e^{-3s}\frac{s^2+2}{s^3+4s}\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

e) $f(t) = 2^{3t}$

Es gilt:

$$f(t) = 2^{3t} = e^{\log(2^{3t})} = e^{3\log(2)t}$$

und mittels Dämpfungssatz:

$$\mathcal{L}\{2^{3t}\}(s) = \mathcal{L}\{e^{3\log(2)t}\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s)(s - 3\log(2)) = \frac{1}{s - 3\log(2)}\,.$$

Es gilt:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ 1 & \text{für} \quad t \geq 0 \end{cases}\,.$$