D-HEST,
Prof. Dr. E. W. Farkas
R. Bourquin und M. Sprecher

Lösung 8

Bitte wenden!

1. Die Treppenfunktion

Berechnen Sie für gegebene Parameter a, $A > 0$ die Laplace-Transformierte der *Treppenfunktion*:

$$f(t) := nA \quad \text{im Intervall} \quad na \leq t < (n+1)a$$

für alle $n \geq 0$.

Hinweis: Es sei die geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für alle $|q| < 1$.

Für $n \geq 0$ sei:

$$I_n(s) = \int_{na}^{(n+1)a} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t\,.$$

Für die Laplace-Transformierte $F(s)$ von f gilt laut Definition (mit der Wahl $\lambda = ka$ für $k \in \mathbb{N}$ sodass $\lambda \to \infty$ wenn $k \to \infty$),

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{k\to\infty} \int_0^{ka} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \int_{na}^{(n+1)a} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k-1} I_n(s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(s)\,, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Linearität des Integrals verwendet haben. Für $I_n(s)$ erhalten wir:

$$I_n(s) = nA \int_{na}^{(n+1)a} e^{-st}\mathrm{d}t = \frac{nA}{s}\left(e^{-nas} - e^{-(n+1)as}\right)$$

Siehe nächstes Blatt!

für alle $n \geq 0$ und damit:

$$
\begin{aligned}
F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(s) &= \frac{A}{s} \left(0 + \left(e^{-as} - e^{-2as}\right) + 2\left(e^{-2as} - e^{-3as}\right) + 3\left(e^{-3as} - e^{-4as}\right) + \ldots\right) \\
&= \frac{A}{s} \left(e^{-as} + e^{-2as} + e^{-3as} + \ldots\right) \\
&= \frac{A}{s} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)as} \\
&= \frac{A}{s} e^{-as} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nas} \\
&= \frac{A}{s} e^{-as} \frac{1}{1 - e^{-as}} \\
&= \frac{A}{s\left(e^{as} - 1\right)}
\end{aligned}
$$

wobei wir den Hinweis für die geometrische Reihe mit $q = e^{-as} < 1$ verwendet haben.

Bitte wenden!

2. Der Faltungssatz

Zeigen Sie, dass:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\} = \frac{t\sin(at)}{2a}$$

für alle $a > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie den Faltungssatz und für das entstehende Faltungsintegral das Additionstheorem: $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Bekanntlich ist:

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$
$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

für alle $a > 0$. Wir definieren die Funktionen $f_1(t) = \cos(at)$ und $f_2(t) = \frac{\sin(at)}{a}$. Dann gilt mit der Linearität des Operators $\mathcal{L}$, dass:

$$\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2} = \mathcal{L}\{f_1\}(s) \cdot \mathcal{L}\{f_2\}(s)\,.$$

Mit dem Faltungssatz schliessen wir hieraus, dass:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\} &= (f_1 * f_2)(t) \\
&= \int_0^t \cos(au)\frac{\sin(a(t-u))}{a}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{a}\int_0^t \cos(au)\left(\sin(at)\cos(au) - \cos(at)\sin(au)\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{\sin(at)}{a}\int_0^t \cos^2(au)\mathrm{d}u - \frac{\cos(at)}{a}\int_0^t \cos(au)\sin(au)\mathrm{d}u \\
&= \frac{\sin(at)}{a}\int_0^t \frac{1}{2}\left(1+\cos(2au)\right)\mathrm{d}u - \frac{\cos(at)}{a^2}\int_0^t a\cos(au)\sin(au)\mathrm{d}u \\
&= \frac{\sin(at)}{2a}\left(t + \frac{\sin(2at)}{2a}\right) - \frac{\cos(at)}{a^2}\left[\frac{\sin^2(au)}{2}\right]_0^t \\
&= \frac{t\sin(at)}{2a} + \frac{\sin(at)}{2a}\cdot\frac{\sin(2at)}{2a} - \frac{\cos(at)}{a^2}\cdot\frac{\sin^2(at)}{2}\,,
\end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt das Additionstheorem verwendet haben. Aus Letzterem erhält man weiter (wähle $x = y = at$), dass $\sin(2at) = 2\sin(at)\cos(at)$ gilt. Setzt

Siehe nächstes Blatt!

man dies ein, so sieht man, dass die beiden letzten Terme sich gegenseitig aufheben, und man erhält das gewünschte Resultat:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\} = \frac{t\sin(at)}{2a}\,.$$

Bitte wenden!

3. Eine Periodische Funktion

Für eine periodische Funktion f mit Periode $T > 0$, i.e. $f(t+T) = f(t)$ für alle $t > 0$, gilt:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$$

wie man aus der Definition $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ durch Aufspaltung des Integrals über Intervalle der Länge T erkennt. Im Folgenden seien $a, A > 0$. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte folgender Funktionen:

a) f periodisch mit $T = a$ und:

$$f(t) = -\frac{A}{a}(t-a) \quad \text{für} \quad 0 \leq t < a\,.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(t)e^{-st}\mathrm{d}t &= \frac{A}{a}\left(a\int_0^a e^{-st}\mathrm{d}t - \int_0^a te^{-st}\mathrm{d}t\right) \\
&= A\int_0^a e^{-st}\mathrm{d}t - \frac{A}{a}\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^a - \frac{A}{as}\int_0^a e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= A\left(1-\frac{1}{as}\right)\frac{1-e^{-as}}{s} + \frac{A}{a}\left(\frac{a}{s}e^{-as}\right) \\
&= A\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{as^2} + \frac{e^{-as}}{as^2}\right)
\end{aligned}$$

und damit:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{A(as-1+e^{-as})}{as^2(1-e^{-as})}\,.$$

b) f periodisch mit $T = 2a$ und:

$$f(t) = \begin{cases} A\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) & \text{für} \quad 0 \leq t < a \\ 0 & \text{für} \quad a \leq t < 2a\,. \end{cases}$$

Siehe nächstes Blatt!

Sei $I = \int_0^{2a} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$. Durch partielle Integration erhält man:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a A \sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{A}{s}\underbrace{\left[\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) e^{-st}\right]_0^a}_{=0} + \frac{A\pi}{sa}\int_0^a \cos\left(\frac{\pi}{a}t\right) e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{A\pi}{s^2 a}\left[\cos\left(\frac{\pi}{a}t\right) e^{-st}\right]_0^a + \frac{A\pi^2}{a^2 s^2}\int_0^a -\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right) e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \frac{A\pi}{s^2 a}(1 + e^{-sa}) - \frac{\pi^2}{a^2 s^2} I\,.
\end{aligned}$$

Dies liefert:

$$I = \frac{\frac{A\pi}{s^2 a}(1 + e^{-sa})}{1 + \frac{\pi^2}{a^2 s^2}} = \frac{Aa\pi}{a^2 s^2 + \pi^2}(1 + e^{-sa})\,.$$

Insgesamt gilt also:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} \cdot I = \frac{Aa\pi}{(a^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})}\,,$$

wobei wir im letzten Schritt $1 - e^{-2as} = (1 + e^{-as})(1 - e^{-as})$ verwendet haben.

Bitte wenden!

4. Laplacetransformation und Differentialgleichungen

Sei $f(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ mit $\omega > 0$ und $A, B \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ auf herkömmliche Art.

Aus der Linearität und da:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$
$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

gilt:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = A\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) + B\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) = \frac{A\omega + Bs}{s^2+\omega^2}\,.$$

b) Die Funktion f ist bekanntlich auch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $f'' = -\omega^2 f$. Bestimmen Sie $F(s)$ erneut, indem Sie die Laplace-Transformation auf diese Differentialgleichung anwenden und dabei den Ableitungssatz für Originalfunktionen verwenden.

Einerseits folgt aus der Linearität:

$$\mathcal{L}\{-\omega^2 f\}(s) = -\omega^2\mathcal{L}\{f\}(s) = -\omega^2 F(s)\,,$$

andererseits wegen des besagten Ableitungssatzes:

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sB - \omega A\,.$$

Aus $f'' = -\omega^2 f$ folgt, dass:

$$\mathcal{L}\{f''\}(s) = \mathcal{L}\{-\omega^2 f\}(s)$$

also:

$$s^2F(s) - sB - \omega A = -\omega^2 F(s)\,.$$

Auflösen nach F ergibt wiederum:

$$F(s) = \frac{A\omega + Bs}{s^2+\omega^2}\,.$$